Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV©

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
www.formav.co/explorer

# BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

## SESSION 2024

## Épreuve de mathématiques

## *GROUPEMENT B* *CODE : 24MATGRB4*

## Durée : 3 heures

| SPÉCIALITÉ | COEFFICIENT |
|---|---|
| Systèmes photoniques | 3 |

**L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.**

**L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.**

**Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il soit complet.**

**Le sujet comporte 8 pages, numérotées de 1/8 à 8/8.**

## EXERCICE 1 (10 points)

On coule du béton pour faire une dalle. Au début, le béton est mou, puis, au fil du temps, il sèche, et devient plus résistant.

On note $f(t)$ la résistance du béton à l'instant $t$.
$f(t)$ est exprimée en mégapascal (MPa) et $t$ désigne le nombre de jours de séchage.

*Les trois parties peuvent être traitées de façon indépendante.*

### Partie A. Résolution d'une équation différentielle

On admet que la fonction $f$ est solution de l'équation différentielle :

$$(E) : \ y' + 0{,}06y = 2{,}1 \ ,$$

où $y$ est une fonction inconnue de la variable réelle $t$, définie et dérivable sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$, et où $y'$ est la dérivée de $y$.

**1.** Résoudre sur $[0\,;+\infty\,[$ l'équation différentielle :

$$(E_0) : \ y' + 0{,}06y = 0$$

On fournit la formule suivante :

| Équation différentielle | Solutions sur un intervalle $I$ |
|---|---|
| $y' + ay = 0$ | $y(t) = k\mathrm{e}^{-at}$ |

**2.** On considère la fonction constante $g$ définie sur $[0\,;+\infty\,[$ par $g(t) = 35$.
Vérifier que la fonction $g$ est solution de l'équation différentielle $(E)$.

**3.** En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(E)$.

**4.** À l'instant $t = 0$, on considère que la résistance du béton est nulle.
En déduire que la fonction $f$ est définie sur $[0\,;+\infty\,[$ par : $f(t) = -35\mathrm{e}^{-0{,}06t} + 35$.

### Partie B. Étude de fonction

On considère à nouveau la fonction $f$ définie sur $[0\,;+\infty\,[$ par :

$$f(t) = -35\mathrm{e}^{-0{,}06t} + 35\,.$$

On rappelle que $f(t)$ désigne la résistance du béton, exprimée en mégapascal, à l'issue de $t$ jours de séchage.

**1.** Quelle est la résistance du béton après $7$ jours de séchage ? Après $72$ heures ? Arrondir au dixième.

**2.** On admet que la fonction $f$ est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et on note $f'$ sa fonction dérivée. Vérifier que, pour tout réel $t$ appartenant à $[0\,;+\infty\,[$ , on a :

$$f'(t) = 2{,}1\mathrm{e}^{-0{,}06t}\,.$$

**3.** Déterminer le signe de $f'(t)$ sur $[0\,;+\infty[$ et en déduire le sens de variations de la fonction $f$ sur $[0\,;\,+\infty[$ .

**4.** Déterminer la limite de $f(t)$ lorsque $t$ tend vers l'infini.
Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

**5.** Le fabricant du béton affirme que la résistance après $28$ jours de séchage correspond à $80\%$ de la résistance finale.

Cette affirmation est-elle juste ?

**6.** On considère la fonction $F$ définie sur $[0\,;+\infty\,[$ par $F(t) = \left(\frac{1750}{3}\right)\mathrm{e}^{-0{,}06t} + 35t$ .
Montrer que la fonction $F$ est une primitive de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

**7.** Déterminer une valeur approchée au dixième de la valeur moyenne de la résistance du béton sur les $28$ premiers jours.

On fournit la formule suivante :

La valeur moyenne $M$ d'une fonction $h$ sur l'intervalle $[a\,;b]$ est définie par :

$$M = \frac{1}{b-a}\int_a^b h(t)\mathrm{d}t\,.$$

## Partie C. Algorithme

On note $N$ le nombre entier correspondant au nombre minimal de jours de séchage permettant d'obtenir une résistance au moins égale à $21$ MPa.

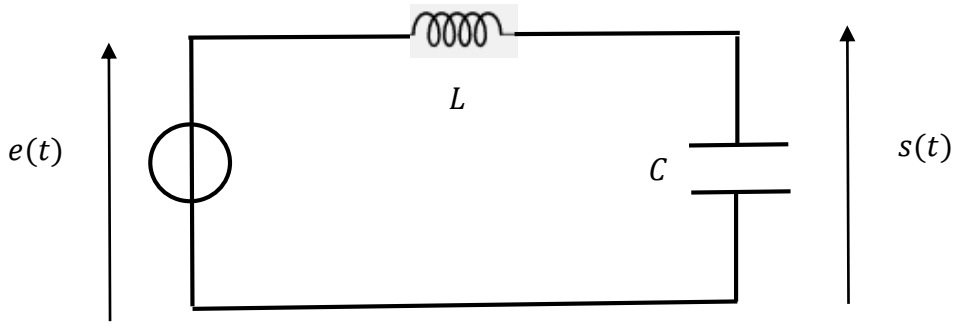
**1.** Recopier l'algorithme ci-dessous et compléter les lignes **3** et **4**.

| | |
|---|---|
| Ligne 1 | $t \leftarrow 0$ |
| Ligne 2 | $R \leftarrow 0$ |
| Ligne 3 | Tant que …… |
| Ligne 4 | $t \leftarrow$ ……. |
| Ligne 5 | $R \leftarrow -35\mathrm{e}^{-0{,}06t} + 35$ |
| Ligne 6 | Fin Tant que |

**2.** Donner la valeur de $N$. Expliquer la démarche suivie.

## EXERCICE 2 (10 points)

*Un formulaire sur les transformées de Laplace est placé à la fin de l'exercice.*




On considère un circuit $LC$.
Le signal d'entrée est noté $e(t)$. Le signal de sortie est noté $s(t)$.

Le système est régi par l'équation différentielle

$$(E) : LCs''(t) + s(t) = e(t).$$

Les conditions initiales sont : $s(0^+) = 0$ et $s'(0^+) = 0$.

**1.** On sait que $L = 10\ H$ et $C = 10^{-5}\ F$.
Réécrire alors l'équation différentielle $(E)$.

**2.** On suppose que :
La fonction $e(t)$ admet une transformée de Laplace notée $E(p)$.
La fonction $s(t)$ admet une transformée de Laplace notée $S(p)$.

Démontrer que l'on a : $(10^{-4}p^2 + 1)S(p) = E(p)$.

**3.** La fonction de transfert $H(p)$ est définie par : $S(p) = H(p) \times E(p)$.

Démontrer que l'on a :

$$H(p) = \frac{10^4}{p^2 + 10^4}\ .$$

**4.** On note $\mathcal{U}(t)$ la fonction échelon unité définie ainsi : $\begin{cases} \mathcal{U}(t) = 0 \text{ si } t < 0\ . \\ \mathcal{U}(t) = 1 \text{ si } t \geq 0\ . \end{cases}$

On suppose désormais que l'on a : $e(t) = 3\,\mathcal{U}(t)$.

Représenter graphiquement sur votre copie le signal $e(t)$ en prenant pour échelle $1$ cm pour chaque axe.

**5.** Donner l'expression de $E(p)$.

**6.** À l'aide des questions précédentes, déterminer $S(p)$ puis démontrer que l'on a :

$$S(p) = \frac{3}{p} - \frac{3p}{p^2 + 10^4} .$$

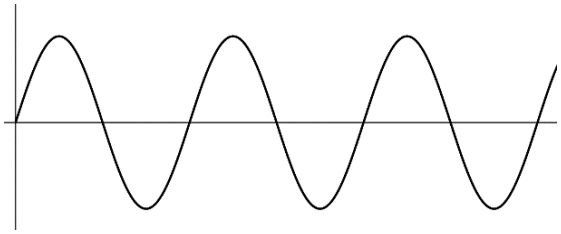
**7.** En déduire l'expression de $s(t)$.

**8.** On admet que l'on a :

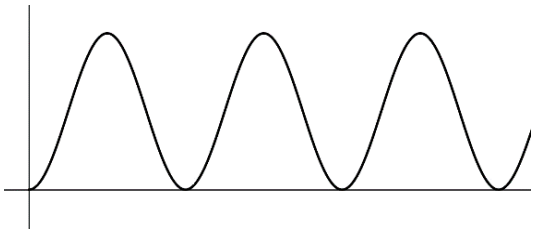
$$s(t) = 3\,\mathcal{U}(t)\,(1 - \cos(100t)).$$

Indiquer, sans justifier, lequel des croquis ci-dessous représente la courbe de la fonction $s(t)$.

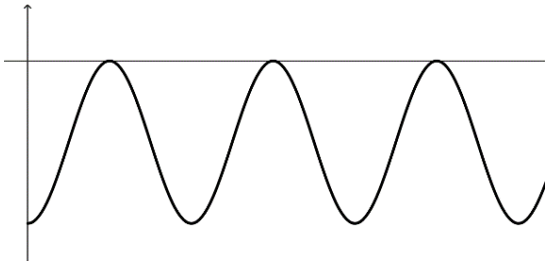
**Croquis n°1**



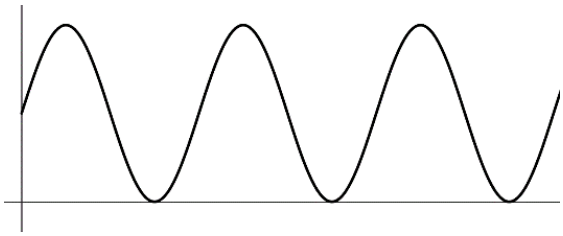
**Croquis n°2**



**Croquis n°3**



**Croquis n°4**



## *FORMULAIRE*

| Fonction | Transformée de Laplace |
|---|---|
| $t \mapsto \mathcal{U}(t)$ | $p \mapsto \dfrac{1}{p}$ |
| $t \mapsto t\mathcal{U}(t)$ | $p \mapsto \dfrac{1}{p^2}$ |
| $t \mapsto t^2\mathcal{U}(t)$ | $p \mapsto \dfrac{2}{p^3}$ |
| $t \mapsto \mathrm{e}^{-at}\mathcal{U}(t), a \in \mathbb{R}$ | $p \mapsto \dfrac{1}{p+a}$ |
| $t \mapsto \mathcal{U}(t-a), a \in \mathbb{R}$ | $p \mapsto \dfrac{1}{p}\mathrm{e}^{-ap}$ |
| $t \mapsto \sin(\omega t)\,\mathcal{U}(t), \omega \in \mathbb{R}$ | $p \mapsto \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$ |
| $t \mapsto \cos(\omega t)\,\mathcal{U}(t), \omega \in \mathbb{R}$ | $p \mapsto \dfrac{\mathrm{p}}{p^2+\omega^2}$ |
| Dans ce qui suit, $f(t)$ est une fonction possédant une transformée de Laplace notée $F(p)$. | |
| $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-at}\mathcal{U}(t), a \in \mathbb{R}$ | $p \mapsto F(p+a)$ |
| $t \mapsto f(t-a)\mathcal{U}(t-a), a \in \mathbb{R}$ | $p \mapsto F(p)\mathrm{e}^{-ap}$ |
| Si, de plus $f$ est dérivable : $t \mapsto f'(t)\mathcal{U}(t)$ | $pF(p) - f(0^+)$ |
| Si, de plus $f'$ est dérivable : $t \mapsto f''(t)\mathcal{U}(t)$ | $p^2F(p) - pf(0^+) - f'(0^+)$ |

## EXERCICE 3 (6 points)

Une usine produit des ampoules pour voitures.

### Partie A. Probabilités conditionnelles

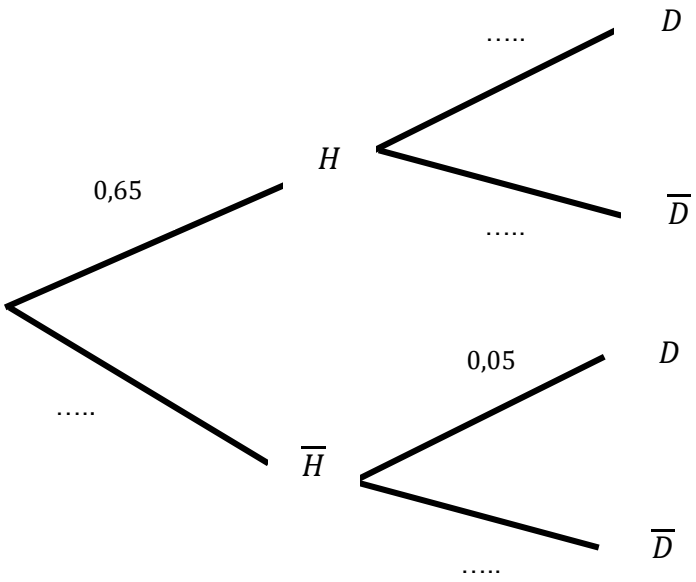
On dispose des données suivantes :

$65\%$ des ampoules produites sont des ampoules pour l'habitacle.
Parmi elles, $15\%$ sont défectueuses.
$35\%$ des ampoules produites sont des ampoules pour les phares.
Parmi elles, $5\%$ sont défectueuses.

On choisit une ampoule au hasard et on considère les évènements suivants :

$H$ : l'ampoule est une ampoule pour l'habitacle.
$D$ : l'ampoule est défectueuse.

**1.** Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui décrit la situation.




**2.** Calculer la probabilité $P(H \cap D)$.

**3.** Démontrer que $P(D) = 0{,}115$.

**4.** L'ampoule choisie est défectueuse.
Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'une ampoule pour phares ? Arrondir au millième.

## Partie B. Loi binomiale

On rappelle que la probabilité qu'une ampoule choisie au hasard soit défectueuse est égale à $0{,}115$.
On prélève un échantillon aléatoire de $300$ ampoules. On suppose que ce prélèvement peut être assimilé à un tirage avec remise.
On note $X$ la variable aléatoire qui compte le nombre d'ampoules défectueuses au sein de cet échantillon.

**1.** Donner la loi suivie par la variable aléatoire $X$ ainsi que ses paramètres.

**2.** Quelle est la probabilité qu'exactement $30$ ampoules de l'échantillon soient défectueuses ? Arrondir au millième.

**3.** Quelle est la probabilité qu'au plus $20$ ampoules de l'échantillon soient défectueuses ? Arrondir au millième.

Copyright © 2026 FormaV. Tous droits réservés.

Ce document a été élaboré par FormaV© avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV©, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV© se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.

Copyright © 2026 FormaV. Tous droits réservés.

Ce document a été élaboré par FormaV© avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV©, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV© se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.