Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV©

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
www.formav.co/explorer

Proposition de correction – BTS Mathématiques – Session 2025

En-tête

- **Session :** 2025
- **Groupement :** B
- **Spécialité :** Système photonique
- **Durée :** 3 heures
- **Calculatrice :** Autorisée (mode examen actif ou type collège)
- **Code sujet :** 25MATGRB4

EXERCICE 1 (8 points) – Étude du refroidissement d'une plaque d'aluminium

Partie A – Équation différentielle

Énoncé résumé

On étudie la température f(t) d'une plaque d'aluminium qui refroidit, modélisée par l'équation différentielle : y' + 0,25y = 7,5.
On demande de :

1. Résoudre l'équation homogène y' + 0,25y = 0.
2. Déterminer la solution constante de l'équation complète.
3. Donner l'ensemble des solutions de l'équation complète.
4. Déterminer la solution particulière vérifiant f(0) = 250.

Correction détaillée

1. **Résolution de l'équation homogène y' + 0,25y = 0 :**
   On reconnaît une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants.
   Selon le formulaire fourni, les solutions sont de la forme : y(t) = k e^{-0,25 t}, où k ∈ ℝ.

   Résultat : Les solutions de l'équation homogène sont y(t) = k e^{-0,25 t}.

   Point de méthode : On applique la formule générale pour une équation du type y' + a y = 0.
   Erreur fréquente : Oublier le signe négatif dans l'exposant ou confondre le coefficient 0,25 avec 0,5 !

2. **Recherche d'une solution constante g(t) = c de l'équation complète :**
   Si g(t) = c (constante), alors g'(t) = 0.
   On remplace dans l'équation : 0 + 0,25c = 7,5 donc c = 7,5 / 0,25 = 30.

   Résultat : c = 30

   Point de méthode : Pour une équation différentielle linéaire non homogène, chercher une solution particulière constante si le second membre est constant.
   Erreur fréquente : Ne pas isoler correctement la constante ou faire une erreur de calcul sur la

division.

3. **Ensemble des solutions de l'équation complète :**
   La solution générale est la somme de la solution générale de l'homogène et d'une solution particulière : y(t) = k e^{-0,25 t} + 30, où k ∈ ℝ.

   Résultat : y(t) = k e^{-0,25 t} + 30

   Point de méthode : Solution générale = solution homogène + solution particulière.
   Erreur fréquente : Oublier d'ajouter la constante 30.

4. **Détermination de la solution particulière vérifiant f(0) = 250 :**
   On cherche k tel que f(0) = k e^{0} + 30 = 250 donc k + 30 = 250 donc k = 220.
   Donc la solution est f(t) = 220 e^{-0,25 t} + 30.

   Résultat : f(t) = 220 e^{-0,25 t} + 30

   Point de méthode : On utilise la condition initiale pour déterminer la constante d'intégration.
   Erreur fréquente : Oublier de remplacer t = 0 ou faire une erreur d'addition.

Partie B – Étude de la fonction f(t) = 220 e^{-0,25 t} + 30

Énoncé résumé

On considère la fonction f(t) = 220 e^{-0,25 t} + 30 (température en °C après t minutes).
On demande :

1. Température après 15 minutes (arrondi à 0,1°C).
2. Limite de f en +∞, conséquence graphique et interprétation physique.
3. Dérivée f'(t), variations de f et interprétation.
4. Vérification de l'affirmation « en 100 s la plaque perd 100°C » et calcul du temps pour passer sous 150°C.
5. Schéma de la courbe (à réaliser sur copie).

Correction détaillée

1. **Température après un quart d'heure (t = 15 min) :**
   f(15) = 220 e^{-0,25 × 15} + 30
   Calculons 0,25 × 15 = 3,75.
   e^{-3,75} ≈ 0,0235 (utiliser la calculatrice).
   Donc f(15) ≈ 220 × 0,0235 + 30 ≈ 5,17 + 30 = 35,17 (arrondi à 0,1°C : 35,2°C).

   Résultat : Après 15 minutes, la température est d'environ **35,2°C**.

   Point de méthode : Bien utiliser la calculatrice pour l'exponentielle.
   Erreur fréquente : Oublier d'ajouter 30 à la fin.

2. **Limite de f en +∞, conséquence graphique et interprétation :**
   Quand t → +∞, e^{-0,25 t} → 0, donc f(t) → 30.

Conséquence graphique : La courbe admet une asymptote horizontale d'équation y = 30.
Interprétation : La température de la plaque tend vers 30°C, qui est la température ambiante.

Résultat : \(\lim_{t \to +\infty} f(t) = 30\). La courbe a une asymptote horizontale y = 30 et la plaque finit par atteindre la température ambiante.

Point de méthode : Limite d'une exponentielle décroissante.
Erreur fréquente : Croire que la température descend à 0°C.

3. **Dérivée et variations :**
f(t) = 220 e^{-0,25 t} + 30
f'(t) = 220 × (-0,25) e^{-0,25 t} = -55 e^{-0,25 t}
Or, e^{-0,25 t} > 0 donc f'(t) < 0 pour tout t ≥ 0.
Donc f est strictement décroissante sur [0 ; +∞[.
Interprétation : La température de la plaque diminue continuellement au cours du temps.

Résultat : f'(t) = -55 e^{-0,25 t} et f est strictement décroissante sur [0 ; +∞[.

Point de méthode : Dérivation de l'exponentielle et signe de la dérivée.
Erreur fréquente : Oublier le signe négatif ou la constante lors de la dérivation.

4. **Affirmation : « en 100 s la plaque a perdu 100°C » ?**
100 secondes = 100 ÷ 60 ≈ 1,67 minutes.
Calculons la température après 1,67 min :
f(1,67) = 220 e^{-0,25 × 1,67} + 30
0,25 × 1,67 ≈ 0,4175
e^{-0,4175} ≈ 0,6587
f(1,67) ≈ 220 × 0,6587 + 30 ≈ 144,9 + 30 = 174,9
Température initiale : 250°C. Perte : 250 - 174,9 = 75,1°C
*Donc l'affirmation est **fausse** !*

Durée pour passer sous 150°C :
On cherche t tel que f(t) < 150.
220 e^{-0,25 t} + 30 < 150
220 e^{-0,25 t} < 120
e^{-0,25 t} < 120 / 220 = 0,5455
-0,25 t < \ln(0,5455) ≈ -0,606
t > -0,606 / 0,25 = 2,424 minutes
En secondes : 2,424 × 60 ≈ 145,4 secondes
Arrondi à la seconde : **146 secondes**

Résultat :

- L'affirmation est **fausse** : en 100 s, la plaque perd environ 75°C.
- Il faut **146 secondes** (soit 2 min 26 s) pour que la température passe sous 150°C.

Point de méthode : Traduire la condition en équation, isoler l'exponentielle, puis le temps.
Erreur fréquente : Oublier de convertir les minutes en secondes ou mal manipuler le logarithme.

5. **Schéma de la courbe :**
   À réaliser sur copie. La courbe part de 250°C à t = 0, décroît rapidement, passe sous 150°C vers t = 2,4 min, atteint environ 35°C à t = 15 min, et tend vers 30°C pour t → +∞.

   Point de méthode : Indiquer les points remarquables : f(0) = 250, f(2,4) ≈ 150, f(15) ≈ 35,2, asymptote y = 30.

EXERCICE 2 (8 points) – Signal périodique et série de Fourier

Énoncé résumé

On considère le signal u(t) de période T = π défini par u(t) = t pour t ∈ [0; π[(puis périodisé).
On demande :

1. Calculer u(1), u(π), u(π+1), u(4).
2. Représenter le signal sur au moins 3 périodes.
3. Le signal est-il alternatif ?
4. Déterminer la fréquence f et la pulsation ω.
5. Calculer b_n et montrer b_n = -1/n.
6. Compléter le tableau des amplitudes A_n pour n = 0, 1, 2, 3, 4.
7. Analyser les spectres proposés.

Correction détaillée

1. **Calcul de u(1), u(π), u(π+1), u(4) :**
   - u(1) = 1 (car 1 ∈ [0 ; π[)
   - u(π) = u(0) = 0 (car le signal est périodique de période π, donc u(π) = u(0))
   - u(π+1) = u(1) = 1 (car π+1 = 1 modulo π)
   - u(4) : Cherchons le reste de la division euclidienne de 4 par π (~3,14).
     4 = π + (4 - π) ≈ 3,14 + 0,86 = 4
     Donc u(4) = 4 - π ≈ 0,86

   Résultat :
   - u(1) = 1
   - u(π) = 0
   - u(π+1) = 1
   - u(4) ≈ 0,86

   Point de méthode : Pour un signal périodique, u(t) = u(t \bmod π).
   Erreur fréquente : Oublier la périodicité, ou mal calculer le reste.

2. **Schéma du signal :**
   À réaliser sur copie. Sur chaque intervalle [kπ ; (k+1)π[, la fonction est affine de pente 1, puis recommence à 0.

   Point de méthode : Représenter trois « rampes » identiques, chacune de 0 à π.

3. **Le signal est-il alternatif ?**

Un signal est alternatif si sa valeur moyenne sur une période est nulle.
Calculons la valeur moyenne : $a_0 = (1/\pi) \int_0^{\pi} t\,dt = (1/\pi) \times [t^2/2]_0^{\pi} = (1/\pi) \times (\pi^2/2) = \pi/2$
Donc la valeur moyenne n'est pas nulle.

Résultat : u(t) n'est **pas** un signal alternatif.

Point de méthode : Calculer l'intégrale de t sur une période.
Erreur fréquente : Croire que toute fonction périodique est alternative.

4. **Fréquence et pulsation :**
T = π
f = 1/T = 1/π ≈ 0,318 Hz
ω = 2π / T = 2π / π = 2

Résultat : f = 1/π ≈ 0,318 Hz, ω = 2

Point de méthode : Formules : f = 1/T, ω = 2π/T.
Erreur fréquente : Inverser les formules ou oublier π.

5. **Calcul de b_n :**
Formule : $b_n = (2/\pi) \int_0^{\pi} t \sin(2n\,t)\,dt$
On admet que $\int_0^{\pi} t \sin(2n\,t)\,dt = -\pi/(2n)$
Donc $b_n = (2/\pi) \times (-\pi/(2n)) = -1/n$

Résultat : $b_n = -1/n$ pour tout $n \geq 1$

Point de méthode : Bien appliquer la formule de la série de Fourier et simplifier.
Erreur fréquente : Oublier le signe moins ou mal simplifier.

6. **Tableau des amplitudes A_n :**
On a $a_n = 0$ pour $n \geq 1$.
$A_0 = |a_0| = |\pi/2| \approx 1,57$
Pour $n \geq 1$, $A_n = |b_n| = 1/n$

n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
Valeur exacte de A_n	π/2	1	1/2	1/3	1/4
Valeur approchée à 10^{-2} près	1,57	1,00	0,50	0,33	0,25

Résultat : Voir tableau ci-dessus.

Point de méthode : Pour $n \geq 1$, $A_n = 1/n$; pour $n = 0$, $A_0 = \pi/2$.
Erreur fréquente : Oublier de prendre la valeur absolue ou mal arrondir.

7. **Analyse des spectres :**
   - **Spectre 2 :** Il présente des amplitudes nulles pour les indices pairs ou impairs (par exemple), ce qui ne correspond pas à $A_n = 1/n$ pour tout $n \geq 1$.
   Donc, il ne peut pas correspondre à u(t).

- **Spectre 3 :** Il présente des amplitudes négatives ou des valeurs négatives, alors que les amplitudes sont toujours positives (A_n = |b_n|).
  Donc, il ne peut pas correspondre à u(t).

Résultat :

- Spectre 2 : ne convient pas car il manque des harmoniques.
- Spectre 3 : ne convient pas car il a des amplitudes négatives.

Point de méthode : Les amplitudes d'un spectre sont toujours positives ou nulles.
Erreur fréquente : Confondre coefficients de Fourier et amplitudes.

EXERCICE 3 (4 points) – Probabilités et loi normale

Énoncé résumé

1. On tire une boule dans une urne contenant 7 blanches (5 n°1, 2 n°2) et 3 noires (2 n°1, 1 n°2).
a) Probabilité de tirer une boule n°2.
b) Probabilité que la boule soit noire sachant que c'est une n°2.
2. On considère la masse d'un cheval M suivant une loi normale de moyenne μ et écart-type σ. La zone grisée sous la courbe (autour de μ) vaut 0,95.

Correction détaillée

1. **Tirage de boule :**
   - Nombre total de boules : 7 + 3 = 10
   - Nombre total de boules n°2 : 2 (blanches) + 1 (noire) = 3
   - a) P(n°2) = 3/10 = 0,3
   - b) Parmi les 3 boules n°2, 1 est noire. Donc : P(noire | n°2) = 1/3 ≈ 0,33

Résultat :

- a) P(n°2) = 0,3
- b) P(noire | n°2) = 1/3 ≈ 0,33

Point de méthode : Utiliser la formule de probabilité conditionnelle.
Erreur fréquente : Prendre le mauvais effectif ou oublier de conditionner.

2. **Loi normale :**
   a) *Valeur de μ :* La moyenne est au centre de la courbe, donc μ est l'abscisse du sommet.
   b) *Pourquoi σ ≈ 40 kg ?*
   La zone grisée vaut 0,95, soit environ [μ - 2σ ; μ + 2σ] (règle des 95%). Si l'intervalle grisé va de μ - 80 à μ + 80, alors 2σ = 80 donc σ = 40.

Résultat :

- a) μ est l'abscisse du sommet de la courbe.
- b) Car l'intervalle [μ - 2σ ; μ + 2σ] contient 95% des valeurs, donc σ ≈ 40 kg.

Point de méthode : Règle des ±2σ pour la loi normale.
Erreur fréquente : Confondre σ et l'intervalle total.

Formulaire récapitulatif

- y' + a y = 0 → y(t) = k e^{-a t}
- f(t) = A e^{-k t} + L : limite pour t → +∞ : L
- Dérivée de e^{a t} : a e^{a t}
- Série de Fourier :
    - a_0 = (1/T) ∫_0^T f(t) dt
    - a_n = (2/T) ∫_0^T f(t) cos(nωt) dt
    - b_n = (2/T) ∫_0^T f(t) sin(nωt) dt
    - A_n = √(a_n^2 + b_n^2)
- Fréquence : f = 1/T ; pulsation : ω = 2π/T
- Probabilité conditionnelle : P(A|B) = P(A ∩ B)/P(B)
- Loi normale : P(μ - 2σ ≤ X ≤ μ + 2σ) ≈ 0,95

Conseils généraux pour réussir l'épreuve de mathématiques en BTS

1. **Lisez attentivement chaque question** avant de commencer à rédiger. Repérez les données et ce qui est vraiment demandé.
2. **Justifiez toutes vos étapes** : une bonne rédaction vaut des points même avec un résultat erroné.
3. **Soignez les conversions d'unités** (minutes, secondes, etc.) et vérifiez vos calculs sur la calculatrice.
4. **Utilisez les formulaires fournis** : ils sont là pour vous aider à structurer la résolution.
5. **Relisez-vous** : vérifiez la cohérence de vos résultats (par exemple, une température négative pour une plaque chaude n'a pas de sens !).

© FormaV EI. Tous droits réservés.

Propriété exclusive de FormaV. Toute reproduction ou diffusion interdite sans autorisation.

Copyright © 2026 FormaV. Tous droits réservés.

Ce document a été élaboré par FormaV© avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV©, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV© se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.

Copyright © 2026 FormaV. Tous droits réservés.

Ce document a été élaboré par FormaV© avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV©, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV© se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.