Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS CIRA

Mathématiques

Session 2018 • Code sujet : **MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **Selon la spécialité : 1, 1,5, 2, 2,5 ou 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Départ d'un train à très haute vitesse : équation différentielle, étude de fonction et calcul intégral (13 questions) — **Page 3**

2. Obsolescence programmée des smartphones : probabilités conditionnelles, loi binomiale et test d'hypothèse (13 questions) — **Page 8**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) — **Page 13**

Sujet officiel (PDF) : https://btscira.fr/assets/annales/bts-cira/E2 - Mathématiques/2018/BTS CIRA - E2 - Mathématiques - Session 2018 - 3-Sujet.pdf

1. Départ d'un train à très haute vitesse : équation différentielle, étude de fonction et calcul intégral

Le départ d'un train à propulsion électromagnétique est modélisé par une fonction donnant la distance parcourue en fonction du temps. L'exercice étudie cette fonction pour vérifier l'objectif de vitesse, puis calcule l'aire d'une pièce dessinée pour une future gare.

A. Résolution d'une équation différentielle

Question 1°. Résoudre sur [0, +∞[l'équation différentielle homogène y' − 0,2y = 0, en utilisant la formule fournie.

La formule donnée concerne une équation de la forme $y' + ay = 0$. Ici, $a = -0,2$, donc toute solution est de la forme $y(t) = ke^{-at}$, où k est une constante réelle. En remplaçant a par sa valeur, on obtient $y(t) = ke^{0,2t}$. Cette fonction est définie sur l'intervalle demandé et sa dérivée $0,2ke^{0,2t}$ vérifie bien l'équation.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{0,2t}, \quad k \in \mathbb{R}$

Question 2°. Vérifier que la fonction g définie sur [0, 3] par g(t) = −15t − 75 est une solution de l'équation différentielle y' − 0,2y = 3t.

On dérive la fonction proposée : $g'(t) = -15$. On remplace ensuite g et sa dérivée dans le membre de gauche : $g'(t) - 0,2g(t) = -15 - 0,2(-15t - 75)$. En développant, on obtient $-15 + 3t + 15 = 3t$, ce qui est exactement le membre de droite. Cette égalité étant vraie pour tout $t \in [0, 3]$, la fonction proposée vérifie bien l'équation différentielle sur son intervalle de définition.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g'(t) - 0,2g(t) = 3t$: g est une solution particulière.

Question 3°. Déduire des solutions de l'équation homogène et de la solution particulière g l'ensemble des solutions de l'équation différentielle y' − 0,2y = 3t.

Les solutions de l'équation homogène sont $ke^{0,2t}$, avec $k \in \mathbb{R}$. La fonction $g(t) = -15t - 75$ est une solution particulière de l'équation complète, comme vérifié à la question précédente. On obtient donc toutes les solutions en ajoutant à cette solution particulière les solutions de l'équation homogène. La constante réelle est arbitraire, et l'expression obtenue est définie sur $[0, +\infty[$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{0,2t} - 15t - 75, \quad k \in \mathbb{R}$

Question 4°. Déterminer la fonction f solution de l'équation différentielle y' − 0,2y = 3t qui vérifie la condition initiale f(0) = 0.

La solution générale est $y(t) = ke^{0,2t} - 15t - 75$. La condition initiale impose $f(0) = 0$. En prenant $t = 0$, on obtient $k - 75 = 0$, donc $k = 75$. En remplaçant la constante dans la solution générale, on trouve la fonction recherchée. Elle vérifie la condition de départ et, puisqu'elle appartient à la famille des solutions générales, elle vérifie aussi l'équation différentielle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 75e^{0,2t} - 15t - 75$

B. Étude de fonction et application, question 1°

Question a). À partir de l'expression fournie de f'(t), résoudre sur l'intervalle [0, 3] l'inéquation f'(t) ≥ 0.

L'expression fournie est $f'(t) = 15e^{0,2t} - 15$. Comme l'exponentielle est croissante, $f'(t) \geq 0$ équivaut à $e^{0,2t} \geq 1$, puis à $0,2t \geq 0$. L'inéquation est donc satisfaite pour tout t de l'intervalle étudié. Le tableau précise le signe aux bornes et à l'intérieur de l'intervalle.

Valeur de t	**Signe de $f'(t)$**
$t = 0$	Nul
$0 < t \leq 3$	Strictement positif

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f'(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, 3]$.

Question b). Déduire de l'étude du signe de f'(t) les variations de la fonction f sur l'intervalle [0, 3].

La dérivée est nulle en $t = 0$ et strictement positive pour $0 < t \leq 3$. La fonction f est donc croissante sur $[0, 3]$, et strictement croissante après $t = 0$. À la première borne, $f(0) = 0$. À la seconde, $f(3) = 75(e^{0,6} - 1) - 45 \approx 16,659$. Ces valeurs indiquent les extrémités du tableau de variations.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> f croît de 0 à $16,659$ sur $[0, 3]$.

B. Étude de fonction et application

Question 2°. Déterminer le nombre de kilomètres parcourus par le wagon au bout d'une minute, puis arrondir le résultat au dixième.

La distance parcourue au bout d'une minute est $f(1)$. En remplaçant t par 1 dans la fonction donnée, on obtient $f(1) = 75(e^{0,2} - 1) - 15$. Cette valeur est environ $1,605$ km. L'énoncé demande un arrondi au dixième : le chiffre des centièmes conduit à retenir $1,6$ km. Il s'agit de la distance totale parcourue depuis le départ.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(1) \approx 1,6$ km.

B. Étude de fonction et application, question 3°

Question a). La vitesse du wagon en kilomètres par minute à l'instant t est donnée par f'(t). Déterminer sa vitesse à t = 2 minutes et arrondir le résultat au dixième.

La vitesse instantanée en kilomètres par minute est donnée par $f'(t) = 15e^{0,2t} - 15$. À $t = 2$, on obtient $f'(2) = 15(e^{0,4} - 1)$, soit environ $7,377$ km/min. L'arrondi au dixième donne $7,4$ km/min. La dérivée fournit ici la vitesse instantanée, et non la vitesse moyenne sur les deux premières minutes.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f'(2) \approx 7,4$ km/min.

Question b). Dire si l'objectif des ingénieurs est atteint : le wagon doit atteindre en moins de deux minutes une vitesse instantanée de 400 km·h⁻¹. Justifier la réponse.

Le seuil de 400 km/h correspond à $400/60 \approx 6,667$ km/min. À deux minutes, la vitesse vaut $15(e^{0,4} - 1) \approx 7,377$ km/min, donc elle dépasse le seuil. De plus, $f'(t) = 15(e^{0,2t} - 1)$ est croissante sur $[0, 3]$. Le seuil est donc franchi avant deux minutes, comme l'exige l'objectif des ingénieurs.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Oui, l'objectif est atteint : le seuil de 400 km/h est franchi avant deux minutes.

B. Étude de fonction et application

Question 4°. Choisir parmi les trois propositions l'équation de la tangente T à la courbe de f au point d'abscisse 2. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.

Une équation de la tangente au point d'abscisse 2 est $y = f'(2)(t-2) + f(2)$. On a $f'(2) = 15(e^{0,4} - 1)$ et $f(2) = 75(e^{0,4} - 1) - 30$. Après développement et réduction, l'équation obtenue est celle de la troisième proposition. Le choix demandé est donc identifié sans qu'il soit nécessaire de calculer une approximation décimale.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Troisième proposition : $y = 15(e^{0,4} - 1)t + 45e^{0,4} - 75$.

C. Calcul intégral

Question 1°. Choisir parmi les trois propositions l'aire A1 du rectangle OPQR, en unités d'aire. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.

Sur le schéma, le rectangle $OPQR$ a pour largeur $OP = 3$, puisque le point P a pour abscisse 3. Sa hauteur vaut $OR = 2,25$, d'après l'équation $y = 2,25$ du bord supérieur. L'aire d'un rectangle est le produit de sa largeur par sa hauteur. On calcule donc $A_1 = 3 \times 2,25$, puis on retient la proposition correspondante.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $A_1 = 6,75$ u. a.

Question 2°. À l'aide de la primitive fournie de g(x) = 27x/(2x² + 18), calculer l'aire A2 de la partie du plan limitée par la courbe de g, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 0 et x = 3.

Sur $[0, 3]$, la fonction g est positive ; l'aire demandée est donc l'intégrale de g entre les deux bornes. La primitive donnée est $G(x) = \frac{27}{4}\ln(x^2 + 9)$. Ainsi, $A_2 = G(3) - G(0) = \frac{27}{4}(\ln 18 - \ln 9)$. Comme $\ln 18 - \ln 9 = \ln 2$, on obtient la valeur exacte puis son approximation numérique.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $A_2 = \frac{27}{4}\ln 2 \approx 4,679$ u. a.

Question 3°. Déduire des questions précédentes l'aire A de la pièce hachurée, en unités d'aire, et arrondir le résultat au millième.

La pièce est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. L'aire située à droite de cet axe est le rectangle d'aire A_1 auquel on retire la partie sous la courbe d'aire A_2. L'aire totale vaut donc $A = 2(A_1 - A_2)$. En utilisant $A_1 = 6,75$ et $A_2 = \frac{27}{4}\ln 2$, on obtient $A = 13,5 - 13,5\ln 2$, puis l'arrondi au millième.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$A \approx 4,143$ u. a.

2. Obsolescence programmée des smartphones : probabilités conditionnelles, loi binomiale et test d'hypothèse

L'exercice étudie les obsolescences technique et logicielle de smartphones, puis le nombre de téléphones non réparables dans un lot prélevé dans un stock. Il se termine par un test bilatéral portant sur la proportion de personnes qui pensent que la marque B pratique l'obsolescence programmée.

A. Probabilités conditionnelles

Question 1°. À partir des données concernant 200 smartphones, recopier et compléter le tableau d'effectifs croisant l'obsolescence technique et l'obsolescence logicielle, avec les effectifs des événements et de leurs compléments.

Les effectifs touchés sont 200 × 0,03 = 6 pour l'obsolescence technique et 200 × 0,08 = 16 pour l'obsolescence logicielle. Parmi ces 16, 12,5 % sont aussi touchés techniquement, soit 2. Les autres cases se déduisent des totaux de ligne et de colonne.

Smartphones	Obsolescence logicielle	Sans obsolescence logicielle	Total
Obsolescence technique	2	4	6
Sans obsolescence technique	14	180	194
Total	16	184	200

✓ RÉPONSE À RETENIR

Tableau complété : 2, 4, 6 ; 14, 180, 194 ; totaux 16, 184, 200.

Question 2°. Donner P(T), P(L) et P_L(T), où T désigne l'obsolescence technique, L l'obsolescence logicielle et P_L(T) la probabilité de T sachant que L est réalisé.

L'énoncé indique directement que 3 % des smartphones sont touchés techniquement et que 8 % le sont logiciellement. La probabilité conditionnelle demandée est également donnée : parmi les téléphones touchés par l'obsolescence logicielle, 12,5 % sont touchés aussi par l'obsolescence technique. On convertit ces pourcentages en nombres décimaux.

✓ RÉPONSE À RETENIR

A. Probabilités conditionnelles, question 3°

Question a). Calculer P(T ∩ L), la probabilité qu'un smartphone soit touché simultanément par les obsolescences technique et logicielle.

Pour obtenir la probabilité que les deux obsolescences soient présentes simultanément, on utilise la probabilité conditionnelle donnée dans l'énoncé : parmi les smartphones touchés logiciellement, 12,5 % sont aussi touchés techniquement. Ainsi, on multiplie la probabilité de L par la probabilité de T sachant L.

$P(T \cap L) = P(L)P_L(T) = 0,08 \times 0,125 = 0,01.$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La probabilité d'une double obsolescence est $P(T \cap L) = 0,01$, soit 1 %.

Question b). Calculer P(T ∪ L), la probabilité qu'un smartphone soit touché par au moins l'un des deux types d'obsolescence.

La probabilité d'être touché par au moins un type d'obsolescence se calcule en additionnant les probabilités de T et de L, puis en soustrayant leur intersection, comptée deux fois. Avec les probabilités obtenues précédemment :

$P(T \cup L) = P(T) + P(L) - P(T \cap L) = 0,03 + 0,08 - 0,01 = 0,10.$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La probabilité d'au moins une obsolescence est $P(T \cup L) = 0,10$, soit 10 %.

Question c). Calculer P_T(L), la probabilité qu'un smartphone soit touché par l'obsolescence logicielle sachant qu'il est touché par l'obsolescence technique.

Pour calculer la probabilité de L sachant T, on rapporte la probabilité de l'intersection à la probabilité de T. Les résultats précédents donnent :

$$P_T(L) = \frac{P(T \cap L)}{P(T)} = \frac{0,01}{0,03} = \frac{1}{3} \approx 0,333.$$

La valeur décimale est arrondie au millième, comme demandé dans l'exercice.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Parmi les téléphones touchés techniquement, environ 0,333 sont aussi touchés logiciellement.

B. Loi binomiale

Question 1°. Justifier que la variable aléatoire X, qui associe à chaque lot de 50 smartphones le nombre de téléphones non réparables, suit une loi binomiale, puis en déterminer les paramètres.

Chaque prélèvement est une épreuve de Bernoulli : le smartphone est non réparable avec la probabilité 0,045. Le stock étant suffisamment important, les 50 prélèvements sont assimilés à des tirages avec remise, donc indépendants et de même probabilité. La variable X compte le nombre de smartphones non réparables parmi ces 50 épreuves : elle suit une loi binomiale de paramètres n = 50 et p = 0,045.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La variable suit la loi binomiale $X \sim \mathcal{B}(50\,;\,0,045)$.

Question 2°. Calculer la probabilité que tous les smartphones d'un lot de 50 soient réparables.

Tous les smartphones sont réparables lorsque le nombre de téléphones non réparables est nul, donc lorsque $X = 0$. La probabilité qu'un smartphone soit réparable vaut $1 - 0,045 = 0,955$. Les 50 tirages étant assimilés à des tirages avec remise, on élève cette probabilité à la puissance 50 :

$P(X = 0) = 0,955^{50} \approx 0,100$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La probabilité que les 50 smartphones soient réparables est d'environ 0,100, soit 10,0 %.

B. Loi binomiale, question 3°

Question a). Faire tourner à la main l'algorithme pour i allant de 0 à 3, puis recopier et compléter le tableau des valeurs de P(X = i) et de S.

Pour chaque entier i, on calcule $P(X = i) = \binom{50}{i}(0,045)^i(0,955)^{50-i}$, puis on ajoute cette probabilité à la valeur précédente de S. Les probabilités et les sommes cumulées ci-dessous sont arrondies au millième.

i	0	1	2	3
P(X = i)	0,100	0,236	0,272	0,205
S	0,100	0,336	0,608	0,813

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> P(X=i) : 0,100 ; 0,236 ; 0,272 ; 0,205. S : 0,100 ; 0,336 ; 0,608 ; 0,813.

Question b). Donner la valeur de S à la fin de l'algorithme et interpréter le résultat dans le contexte du nombre de smartphones non réparables dans un lot.

L'algorithme additionne les probabilités associées aux valeurs 0, 1, 2 et 3 de X. À sa fin, S est donc la probabilité que le nombre de smartphones non réparables soit inférieur ou égal à 3. La somme calculée à la dernière étape vaut environ 0,813.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $S \approx 0,813$: environ 81,3 % des lots comportent au plus 3 smartphones non réparables.

B. Loi binomiale

Question 4°. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et interpréter le résultat.

Pour une loi binomiale de paramètres n et p, l'espérance est $E(X) = np$. Ici, le lot contient 50 smartphones et la probabilité qu'un smartphone soit non réparable vaut 0,045 :

$E(X) = 50 \times 0,045 = 2,25.$

Cette espérance signifie que, sur un grand nombre de lots de 50 smartphones, le nombre moyen de téléphones non réparables est 2,25 par lot.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> En moyenne, un lot de 50 smartphones contient 2,25 smartphones non réparables.

C. Test d'hypothèse

Question 1°. Sous H_0 : p = 0,55, choisir la valeur approchée de h, arrondie au centième, telle que P(0,55 − h ≤ F ≤ 0,55 + h) = 0,95. Une seule des trois propositions est exacte.

Sous H_0, la loi de F est normale, de moyenne 0,55 et d'écart type 0,037. La probabilité centrale de 0,95 correspond à environ 1,96 écart type de part et d'autre de la moyenne. Ainsi, $h \approx 1,96 \times 0,037 = 0,07252$, soit 0,07 au centième. C'est la seule des trois propositions qui convient.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Parmi les choix proposés, la valeur approchée de h au centième est 0,07.

Question 2°. Énoncer la règle de décision du test bilatéral de H_0 : p = 0,55 contre H_1 : p ≠ 0,55, au seuil de signification de 5 %.

Le test est bilatéral au seuil de 5 %. La zone de non-rejet est l'intervalle centré sur la proportion annoncée, avec la demi-largeur retenue h = 0,07. On compare la fréquence observée à ses bornes :

- si elle appartient à [0,48 ; 0,62], on ne rejette pas H_0 ;
- si elle est à l'extérieur, on rejette H_0 au seuil de 5 %.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Ne pas rejeter H_0 si la fréquence est dans [0,48 ; 0,62] ; la rejeter sinon.

Question 3°. Dans l'échantillon de 180 personnes interrogées, 76 pensent que la marque B pratique l'obsolescence programmée. Donner la conclusion du test.

La fréquence observée est $f = 76/180 \approx 0,422$. Elle est inférieure à la borne basse 0,48 de la zone de non-rejet. La fréquence se trouve donc dans la région de rejet : au seuil de 5 %, les données conduisent à rejeter l'hypothèse selon laquelle la proportion vaut 0,55.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> On rejette H_0 au seuil de 5 % : la fréquence observée, environ 0,422, est inférieure à 0,55.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2018)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, groupement B, session 2018, code MATGRB1, durée deux heures et coefficient variable selon la spécialité, de 1 à 3. L'exercice 1 modélise le départ d'un train à très haute vitesse et calcule l'aire d'une pièce de gare. L'exercice 2 traite de l'obsolescence des smartphones, des probabilités, de la loi binomiale et d'un test statistique.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- La solution générale d'une équation différentielle avec second membre est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène associée.
- Lorsque f(t) mesure une distance en fonction du temps, f'(t) représente la vitesse instantanée, dans les unités déduites de celles de f et de t.
- L'aire sous une fonction positive entre deux bornes se calcule par l'intégrale définie de cette fonction sur l'intervalle.
- Pour n tirages indépendants de probabilité p, la loi binomiale a pour paramètres n et p, et son espérance vaut np.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter le domaine de définition, puis appliquer la condition initiale pour déterminer la constante de la solution.
- Vérifier les unités et convertir la vitesse en $km \cdot h^{-1}$ avant de la comparer à l'objectif fixé.
- Dans un tableau d'effectifs, contrôler les totaux des lignes et des colonnes ainsi que l'effectif global.
- Pour le test bilatéral, comparer la fréquence observée aux bornes de décision et conclure en lien avec la situation.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre une équation différentielle avec un second membre ?

Résolvez d'abord l'équation homogène associée et identifiez une solution particulière. La solution générale est leur somme. Appliquez ensuite la condition initiale pour déterminer la constante et obtenir la fonction recherchée.

Q : Quelle différence y a-t-il entre une probabilité conditionnelle et une probabilité d'intersection ?

L'intersection décrit la réalisation simultanée de deux événements. La probabilité conditionnelle considère la population où l'événement donné est réalisé : elle se calcule en divisant la probabilité de l'intersection par celle de cet événement.

Q : Comment gérer les deux heures de l'épreuve ?

Repérez les questions indépendantes et les QCM, puis répartissez le temps entre les deux exercices. Réservez quelques minutes à la fin pour vérifier les calculs, les arrondis, les unités et les conclusions rédigées.

Q : Que faut-il écrire pour justifier une conclusion dans le test d'hypothèse ?

Calculez la fréquence observée et comparez-la à l'intervalle de décision obtenu au seuil de 5 %. Indiquez si elle appartient à cet intervalle, puis formulez clairement la décision concernant l'hypothèse H_0 dans le contexte.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btscira.fr/assets/annales/bts-cira/E2 - Mathématiques/2018/BTS CIRA - E2 - Mathématiques - Session 2018 - 3-Sujet.pdf
Ressources BTS Contrôle Industriel et Régulation Automatique : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.