Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS CIRA

Mathématiques

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 pour Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 pour Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Freinage d'un chariot : équation différentielle, étude de fonction et étude locale** (12 questions) — **Page 3**

2. **Transformées de Laplace d'un signal d'entrée et d'un signal de sortie** (9 questions) — **Page 7**

3. **Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) — **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://btscira.fr/assets/annales/bts-cira/E2 - Mathématiques/2022/BTS CIRA - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

1. Freinage d'un chariot : équation différentielle, étude de fonction et étude locale

Un chariot de fête foraine lancé à 20 m/s est ralenti par un système de freinage, et sa vitesse est modélisée par une fonction vérifiant une équation différentielle. L'exercice étudie cette fonction, la distance parcourue pendant une seconde et son développement limité au voisinage de zéro.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre sur l'intervalle considéré l'équation différentielle homogène y' + 0,8y = 0 en utilisant la formule fournie.

La formule fournie indique que les solutions de $y' + ay = 0$ sont $y(t) = ke^{-at}$, où k est une constante réelle. Ici, le coefficient vaut $a = 0,8$. On remplace donc a par $0,8$ dans la formule. Cette expression donne toutes les solutions sur l'intervalle demandé, sans condition initiale à appliquer.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1.b. Vérifier que la fonction constante g définie par g(t) = 5 est une solution de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

La fonction g est constante, donc sa dérivée est nulle : $g'(t) = 0$. En remplaçant $g(t)$ et $g'(t)$ dans le membre de gauche, on obtient $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$. L'égalité est vérifiée pour tout $t \geq 0$, donc la fonction proposée satisfait bien l'équation différentielle (E).

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 5$ est bien une solution de $y' + 0,8y = 4$.

Question 1.c. Déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

La fonction constante $g(t) = 5$ est une solution particulière de l'équation complète. Si l'on lui ajoute une solution de l'équation homogène associée, on obtient encore une solution de l'équation complète. Or les solutions de cette équation homogène sont $ke^{-0,8t}$, où k est réel. Toutes les solutions de (E) s'écrivent donc comme la somme de ces deux expressions.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = 5 + ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer la solution f de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4 qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

1. La solution générale de l'équation complète est $f(t) = 5 + ke^{-0,8t}$.
2. À $t = 0$, la condition impose $5 + k = 20$, car $e^0 = 1$. Ainsi, $k = 20 - 5 = 15$.
3. En remplaçant k par 15 dans la solution générale, on obtient la fonction qui vérifie à la fois l'équation différentielle et la condition initiale.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1.a. Démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.

On utilise l'expression admise $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$. Lorsque t tend vers $+\infty$, l'exposant $-0,8t$ tend vers $-\infty$, et donc $e^{-0,8t}$ tend vers 0. Par conséquent, le terme exponentiel tend vers 0. La limite de $f(t)$ est alors le terme constant restant, soit 5.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1.b. Déduire de la limite de f que sa courbe représentative admet une asymptote et en donner une équation.

On vient d'établir que $f(t)$ tend vers le réel 5 lorsque t tend vers $+\infty$. Par définition, si une fonction tend vers une valeur réelle en l'infini, sa courbe admet une asymptote horizontale dont l'ordonnée est cette valeur. La courbe représentative C possède donc une asymptote horizontale en $+\infty$, d'équation $y = 5$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Asymptote horizontale en $+\infty$: $y = 5$.

Question 2. À partir de l'expression fournie de f'(t), dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.

t	**0**	$+\infty$
Signe de $f'(t)$	$-$	
Variation de f	20	$\searrow 5$

Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,8t} > 0$, donc $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$. La fonction est strictement décroissante. Elle part de $f(0) = 15 + 5 = 20$ et tend vers 5 en $+\infty$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> f décroît strictement de 20 vers 5 sur $[0; +\infty[$.

Question 3. Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.

Le chariot s'arrête si sa vitesse devient nulle. Or, pour tout $t \geq 0$, l'exponentielle $e^{-0,8t}$ est strictement positive. Ainsi, $15e^{-0,8t} > 0$, et la vitesse $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$ reste strictement supérieure à 5. Elle tend vers 5 sans atteindre cette valeur, et ne peut donc jamais s'annuler.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : la vitesse reste supérieure à $5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, donc le chariot ne s'arrête pas.

Question 4.a. Vérifier que F(t) = -18,75e^(-0,8t) + 5t est une primitive de f sur [0 ; +∞[.

On dérive $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$. La dérivée du terme exponentiel est $-18,75 \times (-0,8)e^{-0,8t}$, et celle de $5t$ est 5. Comme $18,75 \times 0,8 = 15$, on obtient $F'(t) = 15e^{-0,8t} + 5$, qui est précisément l'expression de $f(t)$. Donc F est bien une primitive de f.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $F'(t) = f(t)$: F est une primitive de f.

Question 4.b. En utilisant l'expression de la distance comme intégrale de la vitesse, calculer la distance exacte parcourue entre t = 0 et t = 1, puis donner une valeur arrondie au centimètre.

1. La distance parcourue entre 0 et 1 vaut $d = \int_0^1 f(t)\,dt = F(1) - F(0)$.
2. En évaluant la primitive aux bornes, $d = (-18,75e^{-0,8} + 5) - (-18,75) = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$.
3. La forme exacte peut aussi s'écrire $\frac{95}{4} - \frac{75}{4}e^{-4/5}$ m. L'évaluation numérique donne environ 15,325 m, à arrondir au centimètre.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $d = \frac{95}{4} - \frac{75}{4}e^{-4/5}\ \mathrm{m}$, soit $15,33\ \mathrm{m}$ au centimètre.

Partie C - Étude locale

Question 1. Choisir, parmi les propositions, le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.

Le logiciel donne le polynôme régulier $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$. Pour un développement limité à l'ordre 2, le reste s'écrit sous la forme $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$ quand $t \to 0$. Comme $\frac{24}{5} = 4,8$, seule la troisième proposition présente les bons termes et le bon reste.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Troisième proposition : $f(t) = 20 - 12t + 4,8t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente en l'abscisse 0 est $y = f(0) + f'(0)t$. La condition initiale donne $f(0) = 20$. Avec l'expression fournie de la dérivée, $f'(0) = -12e^0 = -12$. La tangente passe donc par le point $(0; 20)$ et son coefficient directeur vaut -12, ce qui donne l'équation demandée.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y = 20 - 12t$.

2. Transformées de Laplace d’un signal d’entrée et d’un signal de sortie

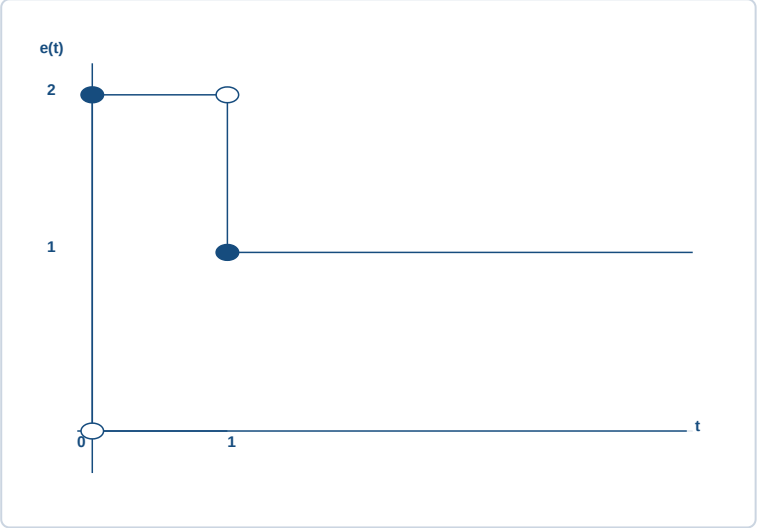
Un système électrique entrée-sortie reçoit le signal causal e(t) = 2U(t) - U(t - 1) et possède une fonction de transfert donnée. Les transformées de Laplace servent à déterminer le signal de sortie, à tracer les signaux et à étudier une valeur particulière ainsi que la limite de sortie.

Partie A - Signal d’entrée

Question 1. Sur le document-réponse à rendre avec la copie, tracer la courbe représentative de la fonction e(t) = 2U(t) - U(t - 1).

Pour $t<0$, la causalité donne $e(t)=0$. Pour $0\leq t<1$, on a $U(t)=1$ et $U(t-1)=0$, donc $e(t)=2$. Pour $t\geq 1$, les deux échelons valent 1, donc $e(t)=1$. Les points aux sauts sont inclus à droite puisque $U(0)=1$.

Signal d’entrée e(t)



> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $e(t)=0$ pour $t<0$, 2 pour $0\leq t<1$, et 1 pour $t\geq 1$.

Question 2. Déterminer la transformée de Laplace E(p) du signal d’entrée.

Par linéarité, on transforme séparément les deux termes de $e(t)$. Le formulaire donne $\mathcal{L}\{U(t)\}=1/p$ et $\mathcal{L}\{U(t-1)\}=e^{-p}/p$, car le second échelon est retardé d’une unité. On applique ensuite les coefficients de l’expression du signal d’entrée.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $$E(p)=\frac{2-e^{-p}}{p}.$$

Partie B - Signal de sortie

Question 1. À partir de la fonction de transfert H(p) et de E(p), démontrer l'expression de S(p) donnée dans le sujet.

La relation entrée-sortie donne $S(p) = H(p)E(p)$. En utilisant $H(p) = 1/(p+1)$ et $E(p) = (2 - e^{-p})/p$, on obtient $S(p) = (2 - e^{-p})/[p(p+1)]$. En séparant les deux termes du numérateur, on retrouve l'expression demandée dans le sujet.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $$S(p) = \frac{2}{p(p+1)} - \frac{e^{-p}}{p(p+1)}.$$

Question 2. Vérifier la décomposition en éléments simples 1/[p(p + 1)] = 1/p - 1/(p + 1).

On réduit le membre de droite au même dénominateur. Le numérateur obtenu est $(p+1) - p = 1$, ce qui donne $1/[p(p+1)]$. La décomposition est donc vérifiée pour les valeurs de p où les fractions sont définies.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $$\frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

Question 3. Donner les transformées de Laplace inverses de 1/p, 1/(p + 1), e^(-p)/p et e^(-p)/(p + 1).

Le formulaire associe $1/p$ à l'échelon unité et $1/(p+1)$ à l'exponentielle causale $e^{-t}U(t)$. La multiplication par e^{-p} correspond à un retard d'une unité : on remplace alors chaque fonction $g(t)$ par $g(t-1)U(t-1)$. On applique cette propriété aux deux transformées.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Dans l'ordre : $U(t)$, $e^{-t}U(t)$, $U(t-1)$, $e^{-(t-1)}U(t-1)$.

Question 4. Déduire l'expression de s(t) sur l'intervalle [0 ; 1[.

La décomposition donne $S(p) = 2(1/p - 1/(p+1)) - e^{-p}(1/p - 1/(p+1))$. Son inverse est $2(1 - e^{-t})U(t) - [1 - e^{-(t-1)}]U(t-1)$. Sur $[0;1[$, le terme retardé est nul. Il ne reste donc que le premier terme, avec $U(t) = 1$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Pour $0 \leq t < 1$, $s(t) = 2(1 - e^{-t})$.

Question 5.a. **Sachant que s(t) = (e - 2)e^(-t) + 1 sur [1 ; +∞[, calculer s(1), en donnant sa valeur exacte puis une valeur approchée au dixième.**

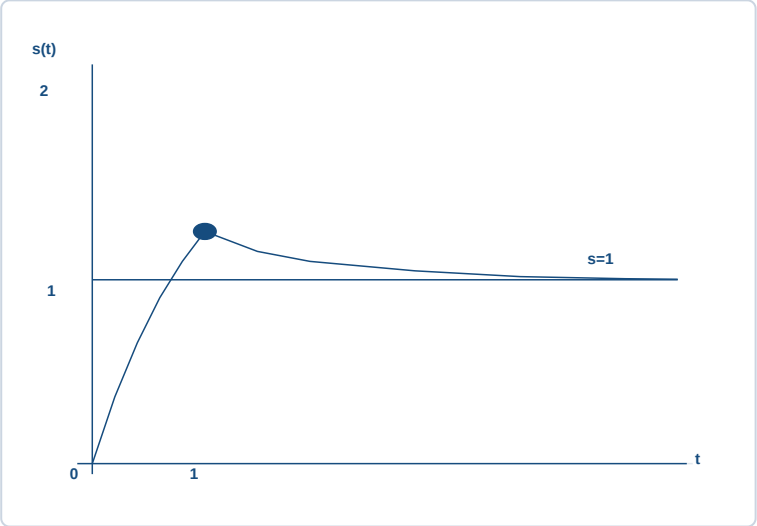
On remplace *t* par 1 dans la formule donnée : $s(1) = (e-2)e^{-1} + 1$. En utilisant $(e-2)/e = 1 - 2/e$, on obtient la forme exacte $2 - 2/e$. Avec $e \approx 2{,}71828$, la valeur est environ 1,264, soit 1,3 au dixième.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $s(1) = 2 - \dfrac{2}{e} \approx 1{,}3.$

Question 5.b. **Sur le document-réponse à rendre avec la copie, compléter la courbe représentative de la fonction s.**

Sur $[0;1[$, la courbe suit $2(1-e^{-t})$ et croît de 0 à $2 - 2/e$. À partir de $t = 1$, elle suit $(e-2)e^{-t} + 1$, décroît et tend vers 1. Les deux expressions donnent la même valeur en $t = 1$: le raccord est continu. Le tracé indique également l'asymptote horizontale $s = 1$.

Courbe représentative du signal de sortie s(t)



> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La courbe croît jusqu'à $s(1) = 2 - 2/e$, puis décroît vers l'asymptote $s = 1$.

Question 5.c. **Donner la limite de la fonction s(t) lorsque t tend vers +∞.**

Pour $t \geq 1$, $s(t) = (e-2)e^{-t} + 1$. Comme e^{-t} tend vers zéro lorsque t tend vers $+\infty$, le terme $(e-2)e^{-t}$ tend également vers zéro. La limite de $s(t)$ est donc le terme constant.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} s(t) = 1.$

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, session 2022, groupement B, code 22MATGRB2, durée deux heures, coefficient 1,5 en conception et industrialisation en microtechniques et 2 en électrotechnique. Les deux exercices, notés chacun sur 10, étudient le freinage d'un chariot et un système électrique, avec équations différentielles, analyse de fonctions, intégration et transformées de Laplace.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Les solutions de y' + ay = 0 sont y(t) = ke^(-at) ; une solution particulière permet de former les solutions de l'équation complète.
- Pour f(t) = 15e^(-0,8t) + 5, la limite en +∞ vaut 5 et l'asymptote horizontale a pour équation y = 5.
- La distance parcourue entre deux instants est l'intégrale de la vitesse sur l'intervalle correspondant.
- La transformée de Laplace de U(t - a) est e^(-ap)/p ; un retard de a multiplie la transformée par e^(-ap).

Points de vigilance & attentes du jury

- Appliquer f(0) = 20 à la solution générale pour déterminer la constante de l'équation différentielle.
- Une vitesse qui tend vers 5 m/s ne tend pas vers zéro : le chariot ne s'arrête pas selon le modèle.
- Pour la distance, évaluer la primitive aux deux bornes et respecter l'arrondi au centimètre demandé.
- Tenir compte du changement de signal à t = 1 et des facteurs de retard dans les transformées de Laplace.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment appliquer la condition initiale à l'équation différentielle du chariot ?

Écrivez la solution générale comme somme d'une solution de l'équation homogène et d'une solution particulière. Remplacez ensuite t par 0 et imposez f(0) = 20 pour déterminer la constante.

Q : Comment savoir si le système de freinage arrête effectivement le chariot ?

Étudiez la vitesse lorsque le temps augmente. Dans ce sujet, f(t) tend vers 5 m/s, une valeur positive : la vitesse ne tend donc pas vers zéro et le chariot ne s'arrête pas selon ce modèle.

Q : Comment organiser les deux exercices pendant les deux heures ?

Chaque exercice vaut 10 points. Répartissez le temps selon votre aisance, gardez quelques minutes pour vérifier les calculs, les unités et les tracés, et n'oubliez pas de rendre le document-réponse demandé avec la copie.

Q : Quelles sont les attentes pour les tracés et les valeurs numériques ?

Les tracés doivent respecter les niveaux et les changements de signal, notamment à t = 1. Donnez les valeurs exactes lorsqu'elles sont demandées, puis l'approximation au dixième ou au centimètre selon la consigne.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btscira.fr/assets/annales/bts-cira/E2 - Mathématiques/2022/BTS CIRA - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf
Ressources BTS Contrôle Industriel et Régulation Automatique : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.