Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS CIRA

Mathématiques

Session 2022 • Code sujet : **22-MATGRD1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **Analyses de biologie médicale : 1 ; Bio analyses et contrôles : 2 ; Biotechnologies : 1 ; Europlastics et composites : 1,5 ; Bioqualité : 2**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Modélisation de l'évolution du nombre de personnes équipées d'un implant médical (13 questions) **Page 3**

2. Approvisionnement, pannes et contrôle qualité d'une machine à embouteiller (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://btscira.fr/assets/annales/bts-cira/E2 - Mathématiques/2022/BTS CIRA - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 3-Sujet.pdf

1. Modélisation de l'évolution du nombre de personnes équipées d'un implant médical

Dans un pays de 60 millions d'habitants, on étudie l'évolution du nombre de personnes équipées d'un implant médical depuis 2013. Deux modèles sont étudiés : un ajustement exponentiel à partir de données statistiques, puis une fonction issue d'une équation différentielle.

Partie A

Question 1. Compléter le tableau de l'annexe à rendre avec la copie en calculant les valeurs de y = ln(N - 30), arrondies au millième.

On calcule successivement $y = \ln(N - 30)$, avec N exprimé en milliers, puis on arrondit au millième.

Rang k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	3,268	3,336	3,418	3,497	3,578	3,656	3,738	3,818	3,898

✓ RÉPONSE À RETENIR

Valeurs de y, dans l'ordre des rangs : 3,268 ; 3,336 ; 3,418 ; 3,497 ; 3,578 ; 3,656 ; 3,738 ; 3,818 ; 3,898.

Question 2.a. À l'aide de la calculatrice, déterminer par la méthode des moindres carrés une équation de la droite d'ajustement du nuage de points $M_i(k_i ; y_i)$. Écrire l'équation sous la forme y = ak + b, avec a et b arrondis au centième.

La régression linéaire des points transformés donne une pente d'environ 0,0794 et une ordonnée à l'origine d'environ 3,2606. Arrondis au centième, ces coefficients valent respectivement 0,08 et 3,26.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Droite d'ajustement : y = 0,08k + 3,26.

Question 2.b. À partir de l'équation de la droite d'ajustement, déduire que le nombre de personnes équipées de l'implant, exprimé en milliers et en fonction du rang k, peut être modélisé par N(k) = 30 + 26,05e^(0,08k).

De $y = \ln(N - 30)$, on déduit $N - 30 = e^y$. En remplaçant y par 0,08k + 3,26, on obtient $N(k) = 30 + e^{3,26}e^{0,08k}$. Comme $e^{3,26} \approx 26,05$, on retrouve le modèle demandé.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$N(k) = 30 + 26,05e^{0,08k}$, en milliers de personnes.

Question 3.a. **En supposant que le modèle proposé reste valide, déterminer au millier près le nombre de personnes équipées de l'implant en 2026.**

En 2026, k = 2026 - 2013 = 13. Le modèle donne $N(13) = 30 + 26{,}05e^{0{,}08 \times 13} \approx 103{,}701$ milliers. L'arrondi au millier de personnes est donc 104 000.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> En 2026 : environ 104 000 personnes.

Question 3.b. **Si le nombre d'habitants du pays reste stable à long terme, indiquer si le modèle étudié reste valide sur le long terme et justifier la réponse.**

Comme $e^{0{,}08k}$ tend vers $+\infty$, $N(k)$ tend également vers $+\infty$. Le modèle finirait donc par prévoir plus de personnes équipées que la population du pays, fixée à 60 millions. Il n'est pas valide à long terme.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : le modèle dépasse à terme la population fixe de 60 millions d'habitants.

Partie B

Question 1.a. **Résoudre sur l'intervalle [0 ; +∞[l'équation différentielle homogène (E_0) : y' + 0,05y = 0.**

La solution générale de l'équation homogène $y' + 0{,}05y = 0$ est une fonction exponentielle de la forme $y(t) = Ce^{-0{,}05t}$, où C est une constante réelle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = Ce^{-0{,}05t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 1.b. **Déterminer une solution constante de l'équation différentielle (E) : y' + 0,05y = 0,05.**

Pour une solution constante $y(t) = c$, $y' = 0$. L'équation devient $0{,}05c = 0{,}05$, donc $c = 1$. La fonction constante égale à 1 est ainsi une solution particulière.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Une solution constante est $y(t) = 1$.

Question 1.c. **Résoudre sur l'intervalle [0 ; +∞[l'équation différentielle (E) : y' + 0,05y = 0,05.**

Les solutions de l'équation complète sont la somme d'une solution particulière, égale à 1, et des solutions de l'équation homogène. On obtient ainsi toutes les solutions sur [0 ; +∞[.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = 1 + Ce^{-0,05t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 1.d. **Sachant que g(0) = 8, déduire une expression de la fonction g sur [0 ; +∞[.**

La condition initiale donne g(0) = 1 + C = 8, donc C = 7. En remplaçant la constante dans la solution générale, on obtient l'expression de g.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 1 + 7e^{-0,05t}$.

Question 2. **Selon le modèle f(t) = 450/(1 + 7e^(-0,05t)), déterminer au millier près le nombre de personnes qui seront équipées de l'implant en 2026. Le temps t est mesuré en années depuis 2013 et f(t) représente un nombre de personnes exprimé en milliers.**

En 2026, t = 2026 - 2013 = 13. Alors $f(13) = 450 / (1 + 7e^{-0,05 \times 13}) \approx 96,685$ milliers de personnes, soit 97 000 au millier près.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> En 2026 : environ 97 000 personnes.

Question 3. **Déterminer la limite de f en +∞ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.**

Lorsque t tend vers +∞, $e^{-0,05t}$ tend vers 0. Le dénominateur de f tend donc vers 1, d'où une limite égale à 450. Puisque f est exprimée en milliers de personnes, le modèle prévoit une stabilisation à 450 000 personnes équipées.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La limite est 450, soit 450 000 personnes équipées à long terme.

Question 4. **À l'aide de l'expression de f'(t) fournie, déduire le sens de variation de f sur [0 ; +∞[et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.**

Pour tout $t \geq 0$, le numérateur $315e^{-0,05t}$ de f′ est positif, tout comme son dénominateur $2(1 + 7e^{-0,05t})^2$. Ainsi $f'(t) > 0$ sur [0 ; +∞[: le nombre de personnes équipées augmente selon ce modèle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> f est strictement croissante : le nombre de personnes équipées augmente.

Question 5. **Déterminer à partir de quelle année le nombre de personnes équipées de l'implant dépassera 120 000, soit 120 milliers, et expliquer la méthode employée.**

Résoudre $f(t) > 120$ revient à résoudre $e^{-0,05t} < 11/28$, soit $t > 20 \ln(28/11) \approx 18,69$. Le premier rang entier satisfaisant cette condition est 19, ce qui correspond à 2013 + 19.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Le nombre dépassera 120 000 à partir de 2032.

2. Approvisionnement, pannes et contrôle qualité d'une machine à embouteiller

Dans une usine, une machine à embouteiller est alimentée par un réservoir d'eau et une file de bouteilles vides. L'exercice étudie les probabilités de défaut d'approvisionnement et de panne, puis un test statistique portant sur le réglage du volume moyen de remplissage à 75 cL.

Partie A - Défaut d'approvisionnement

Question 1. Les événements A, correspondant au vidage de la file d'entrée, et B, correspondant au vidage du réservoir, sont indépendants et vérifient P(A) = 0,03 et P(B) = 0,02. Associer chacune des quatre phrases du tableau de gauche à l'information correspondante du tableau de droite : probabilité que la file ne se vide pas, événement où la file se vide sans que le réservoir se vide, probabilité que les deux se vident et probabilité d'un défaut d'approvisionnement. Aucune justification n'est demandée.

La probabilité que la file ne se vide pas vaut $1 - P(A) = 0,97$. Par indépendance, $P(A \cap \bar{B}) = 0,03 \times 0,98 = 0,0294$ et $P(A \cap B) = 0,03 \times 0,02 = 0,0006$. Un défaut correspond à $A \cup B$: sa probabilité vaut $0,03 + 0,02 - 0,0006 = 0,0494$, soit 0,049 dans le tableau à trois décimales.

Phrase	Information associée
1	E : 0,97
2	C : $A \cap \bar{B}$
3	F : 0,0006
4	D : 0,049

✓ RÉPONSE À RETENIR

Associations à inscrire : 1-E, 2-C, 3-F et 4-D.

Partie B - Pannes sur 200 jours

Question 1. La probabilité que la machine tombe en panne un jour donné est 0,025 et les jours de panne sont indépendants. Donner sans justification la loi de probabilité suivie par X, le nombre de jours de panne sur une période de 200 jours, et préciser ses paramètres.

Chaque journée correspond à une épreuve de Bernoulli : la machine tombe en panne avec la probabilité 0,025, ou ne tombe pas en panne. Sur les 200 jours, ces épreuves sont indépendantes et ont la même probabilité de succès. La variable X compte le nombre de jours de panne parmi ces 200 épreuves. Elle suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = 0,025$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

X suit la loi binomiale de paramètres n = 200 jours et p = 0,025 pour une panne.

Question 2.a. **La loi de X est approchée par une loi de Poisson de paramètre λ. Justifier que λ = 5.**

Pour approcher une loi binomiale B(n ; p) par une loi de Poisson, on prend le paramètre λ égal à l'espérance np de la loi binomiale. Ici, le nombre de jours observés est n = 200 et la probabilité de panne chaque jour est p = 0,025. Ainsi, λ = np = 200 × 0,025 = 5.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La loi de Poisson utilisée a pour paramètre λ = 5.

Question 2.b. **Pour une variable aléatoire Y suivant cette loi de Poisson, donner la valeur de P(Y ≤ 10), arrondie à 10^{-3} près.**

Pour une loi de Poisson de paramètre 5, la probabilité demandée s'obtient en additionnant les probabilités des valeurs entières de 0 à 10. On utilise la formule $P(Y = k) = e^{-5}\,5^k/k!$ pour chaque valeur de k. La somme vaut environ 0,9863047 ; après arrondi au millième, on obtient 0,986.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La probabilité recherchée est P(Y ≤ 10) ≈ 0,986, arrondie au millième.

Question 2.c. **Le graphique suggère que P(Y = 15) est égale à 0. À l'aide de la formule fournie pour P(Y = k), déterminer si cette conjecture est vraie ou fausse et justifier.**

La formule fournie donne, pour k = 15, une probabilité égale à $5^{15}e^{-5}/15!$. Le calcul donne environ 0,000156931. Cette valeur est strictement positive, même si elle est très petite et n'est pas visible à l'échelle du graphique. La représentation suggère donc une probabilité nulle, mais cette conjecture est fausse.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La conjecture est fausse : P(Y = 15) ≈ 0,000157, une valeur positive mais très faible.

Partie C - Qualité de l'embouteillement

Question 1. **À partir du tableau des mesures portant sur 100 bouteilles, où les volumes de 73, 74, 75, 76 et 77 cL ont respectivement les effectifs 17, 20, 43, 13 et 7, déterminer à la calculatrice la moyenne et l'écart type de l'échantillon. Arrondir l'écart type à 10^{-2}.**

La moyenne pondérée des volumes se calcule en multipliant chaque volume par son effectif, puis en divisant la somme par les 100 bouteilles. L'écart type se calcule à partir de la moyenne et des écarts au carré, pondérés par les effectifs.

Volume (cL)	73	74	75	76	77
Effectif	17	20	43	13	7

On obtient une moyenne de 74,73 cL et un écart type d'environ 1,103 cL, soit 1,10 cL au centième.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Moyenne de l'échantillon : 74,73 cL ; écart type : 1,10 cL.

Question 2.a. **Pour le test bilatéral au seuil de confiance de 95 % des hypothèses H_0 : m = 75 et H_1 : m ≠ 75, la moyenne Z d'un échantillon de 100 bouteilles suit, sous H_0, une loi normale d'espérance 75 et d'écart type 0,11. Déterminer h tel que P(75 - h ≤ Z ≤ 75 + h) ≈ 0,95, à 10^{-2} près.**

Sous H_0, Z suit une loi normale de moyenne 75 et d'écart type 0,11. Un intervalle centré sur 75 contenant 95 % des valeurs correspond à l'intervalle central à 95 % de la loi normale centrée réduite. La valeur critique est environ 1,96. On obtient donc h = 1,96 × 0,11 = 0,2156 cL, soit 0,22 cL au centième.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> À 10^{-2} près, la demi-largeur de l'intervalle central est h = 0,22 cL.

Question 2.b. **Énoncer la règle de décision du test bilatéral au seuil de confiance de 95 %.**

La règle consiste à comparer la moyenne observée de l'échantillon à l'intervalle centré sur 75 cL, calculé à la question précédente. Avec h arrondi à 0,22 cL, cet intervalle est [75 − 0,22 ; 75 + 0,22], soit [74,78 ; 75,22] cL. Si la moyenne est dans cet intervalle, on ne rejette pas H_0 au seuil de 5 %. Si elle est à l'extérieur, on rejette H_0.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Ne pas rejeter H_0 si la moyenne observée appartient à [74,78 ; 75,22] cL ; sinon, rejeter H_0.

Question 2.c. **À partir des résultats de l'échantillon fourni, indiquer si l'hypothèse H_0 : m = 75 peut être acceptée.**

La moyenne observée dans l'échantillon est 74,73 cL. La borne inférieure de l'intervalle de décision est 74,78 cL. Comme 74,73 < 74,78, la moyenne observée n'appartient pas à l'intervalle [74,78 ; 75,22] cL. Au seuil de confiance de 95 %, les résultats conduisent donc à rejeter l'hypothèse H_0 selon laquelle la moyenne vaut 75 cL.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> On rejette H_0 : la moyenne observée de 74,73 cL est inférieure à la borne 74,78 cL.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : L'épreuve de mathématiques du BTS Groupement D1, session 2022, code 22-MATGRD1, dure 2 heures et son coefficient varie selon la spécialité, de 1 à 2. Les deux exercices, notés chacun sur 10 points, portent sur l'évolution du nombre de personnes équipées d'un implant médical et sur une machine à embouteiller. Les compétences évaluées comprennent modélisation, équations différentielles, probabilités et test statistique.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour ajuster une évolution exponentielle, poser y = ln(N - 30), ajuster y en fonction de k, puis revenir à N.
- La solution de y' + ay = c est la somme d'une solution particulière constante et de la solution générale de l'équation homogène.
- Le nombre de pannes sur 200 jours indépendants suit une loi binomiale B(200 ; 0,025), approchée ici par une loi de Poisson de paramètre λ = 5.
- Un test bilatéral à 95 % compare la moyenne observée à l'intervalle centré sur la moyenne sous H_0, de probabilité 0,95.

Points de vigilance & attentes du jury

- Dans l'exercice 1, les nombres de personnes sont exprimés en milliers et le temps t est compté en années depuis 2013.
- Distinguer l'intersection, la réunion et l'événement contraire lors des calculs de probabilités d'approvisionnement.
- Une probabilité ponctuelle d'une loi de Poisson reste positive même si sa valeur est trop faible pour être visible sur le graphique.
- Pour le test, utiliser l'écart type 0,11 indiqué sous H_0 et comparer la moyenne observée à l'intervalle de décision.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment passer d'un ajustement linéaire à un modèle exponentiel ?

On transforme les données avec y = ln(N - 30), puis on ajuste y par une droite ak + b. En exponentiant, on obtient N = 30 + e^(ak+b), ce qui permet de retrouver le modèle exponentiel.

Q : Pourquoi le nombre de pannes peut-il être approché par une loi de Poisson ?

Le nombre de pannes suit d'abord une loi binomiale de paramètres n = 200 et p = 0,025. L'approximation de Poisson donne λ = np = 5 et est adaptée ici à un grand nombre d'essais de probabilité faible.

Q : Comment organiser son temps pendant cette épreuve de deux heures ?

Les deux exercices valent chacun 10 points. Prévoyez un temps équilibré pour chacun, puis gardez une marge pour effectuer les calculs, rédiger les justifications demandées et vérifier les unités ainsi que les arrondis.

Q : Comment conclure le test bilatéral sur le réglage de la machine ?

On construit l'intervalle centré en 75 avec l'écart type 0,11 et une probabilité de 0,95 sous H_0. Si la moyenne observée appartient à cet intervalle, H_0 est acceptée selon la formulation du sujet ; sinon, elle est rejetée.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btscira.fr/assets/annales/bts-cira/E2 - Mathématiques/2022/BTS CIRA - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 3-Sujet.pdf

Ressources BTS Contrôle Industriel et Régulation Automatique : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.