Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS CIRA

Mathématiques

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Fermeture d'un tiroir : équation différentielle et étude de fonction (12 questions) **Page 3**

2. Séries de Fourier d'une fonction paire périodique (10 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 13**

Sujet officiel (PDF) : https://btscira.fr/assets/annales/bts-cira/E2 - Mathématiques/2023/BTS CIRA - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf

1. Fermeture d'un tiroir : équation différentielle et étude de fonction

La distance f(t), en centimètres, entre le fond d'un meuble et celui d'un tiroir est étudiée pendant la fermeture, avec t exprimé en secondes. L'exercice mobilise une équation différentielle, l'étude de la fonction obtenue, un algorithme pour déterminer le temps de fermeture et le calcul d'une position moyenne.

Partie A : Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre l'équation caractéristique r² + 5r + 4 = 0.

On factorise le trinôme : $r^2 + 5r + 4 = (r + 1)(r + 4)$. Un produit est nul si l'un de ses facteurs est nul. On résout donc $r + 1 = 0$ et $r + 4 = 0$: l'équation caractéristique possède deux racines réelles distinctes.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Les racines sont $r_1 = -1$ et $r_2 = -4$.

Question 1.b. Résoudre l'équation différentielle y'' + 5y' + 4y = 0 en utilisant l'équation caractéristique et le tableau fourni.

1. L'équation caractéristique admet les deux racines distinctes -1 et -4.
2. D'après le tableau fourni, la solution générale est une combinaison des exponentielles associées aux racines.

Les constantes réelles sont déterminées par d'éventuelles conditions initiales.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$, avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Question 2.a. À partir de la situation à l'instant t = 0, où le point M est à 20 cm du point O et se déplace vers O à la vitesse de -10 cm·s⁻¹, déduire f(0) et f'(0).

La distance OM est représentée par $f(t)$, en centimètres : à l'instant initial, elle vaut 20 cm. La vitesse correspond à la dérivée de cette distance par rapport au temps. Le signe négatif indique que la distance diminue pendant que le tiroir se rapproche du fond du meuble.

Grandeur à $t = 0$	**Valeur**
Distance OM	20 cm
Vitesse	-10 cm·s^{-1}

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(0) = 20$ cm et $f'(0) = -10$ cm·s^{-1}.

Question 2.b. **En admettant que f(t) = (70/3)e⁻ᵗ - (10/3)e⁻⁴ᵗ, déterminer la valeur exacte de la distance OM deux secondes après le début de la fermeture.**

On remplace t par 2 dans l'expression admise :

$$f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}.$$

Cette expression exacte donne la distance en centimètres. Sa valeur approchée, utile pour contrôler le résultat, est obtenue en évaluant les deux exponentielles puis en faisant la différence.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $OM(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$ cm, soit environ $3{,}1567$ cm.

Question 2.c. **Le tiroir est considéré fermé lorsque la distance OM est inférieure à 0,5 cm. Déterminer si le constructeur a raison d'affirmer que le tiroir est fermé en moins de 4 secondes et justifier.**

À 4 secondes, la distance vaut

$$f(4) = \frac{70}{3}e^{-4} - \frac{10}{3}e^{-16} \approx 0{,}4274 \text{ cm}.$$

Cette valeur est inférieure au seuil de 0,5 cm. Puisque f est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$, le seuil a nécessairement été franchi avant 4 secondes.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Oui, le constructeur a raison : $f(4) \approx 0{,}4274 < 0{,}5$ cm, donc la fermeture intervient avant 4 s.

Partie B : Étude de fonction

Question 1.a. **En utilisant la limite de e⁻ᵘ lorsque u tend vers +∞, déterminer la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞.**

Quand $t \to +\infty$, les quantités t et $4t$ tendent vers $+\infty$. Ainsi, $e^{-t} \to 0$ et $e^{-4t} \to 0$. Comme $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$, sa limite est la différence de deux termes qui tendent vers zéro.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0.$

Question 1.b. **Déduire de la limite précédente que la courbe représentative de f possède une asymptote et en donner une équation.**

La limite de $f(t)$ en $+\infty$ est finie et vaut zéro. La courbe représentative admet donc une asymptote horizontale d'équation $y = 0$, qui est l'axe des abscisses.

✓ RÉPONSE À RETENIR

L'asymptote horizontale de la courbe est $y = 0$.

Question 2.a. Déterminer l'expression de f'(t) pour tout t appartenant à [0 ; +∞[.

On dérive chaque exponentielle avec la règle $(e^{u(t)})' = u'(t)e^{u(t)}$. Le premier terme donne $-\frac{70}{3}e^{-t}$. Pour le second, le coefficient $-\frac{10}{3}$ est multiplié par la dérivée de $-4t$, soit -4, ce qui donne $\frac{40}{3}e^{-4t}$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t}$.

Question 2.b. Sachant que f'(t) < 0 sur [0 ; +∞[, établir le tableau de variations de f sur cet intervalle.

Puisque $f'(t) < 0$ sur l'intervalle étudié, la fonction est strictement décroissante. Sa valeur initiale est $f(0) = \frac{70}{3} - \frac{10}{3} = 20$, et sa limite en $+\infty$ est zéro.

t	**0**	$+\infty$
Signe de $f'(t)$	$-$	$-$
Variation de f	20	$\searrow$ 0

✓ RÉPONSE À RETENIR

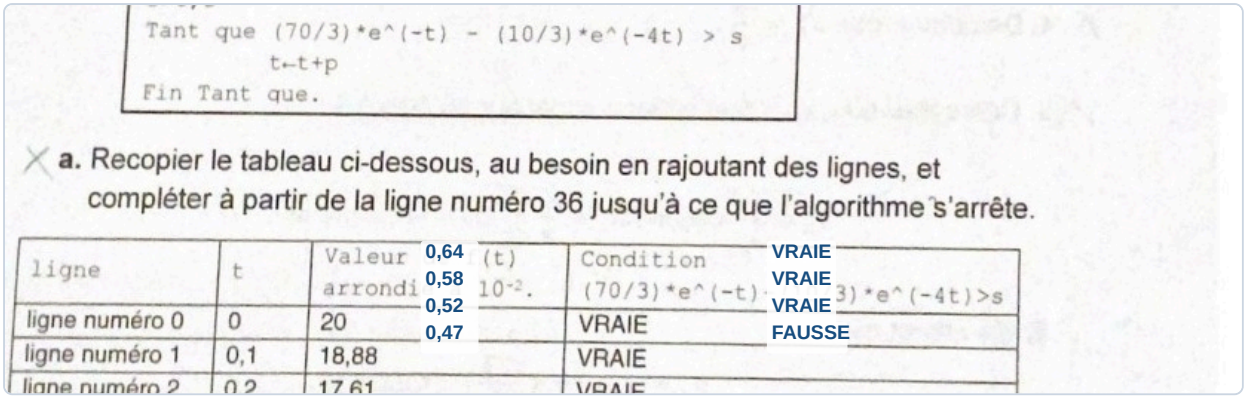
Sur $[0; +\infty[$, f décroît strictement de 20 vers 0.

Question 3.a. Compléter le tableau de l'algorithme à partir de la ligne numéro 36, en ajoutant des lignes si nécessaire, avec les valeurs de f(t) arrondies à 10^{-2} et l'état de la condition, jusqu'à l'arrêt de l'algorithme.

À chaque passage, t augmente de 0,1 et la boucle continue tant que $f(t) > 0{,}5$. On calcule la fonction aux valeurs indiquées, puis on arrondit au centième. À $t = 3{,}8$, la condition reste vraie ; à $t = 3{,}9$, elle devient fausse : cette dernière ligne est donc ajoutée avant l'arrêt.

Ligne	t	**Valeur de $f(t)$, au centième**	**Condition $f(t) > 0{,}5$**
36	3,6	0,64	VRAIE
37	3,7	0,58	VRAIE
38	3,8	0,52	VRAIE
39	3,9	0,47	FAUSSE

Tableau de l’algorithme complété



```
Tant que (70/3)*e^(-t) - (10/3)*e^(-4t) > s
        t←t+p
Fin Tant que.
```

a. Recopier le tableau ci-dessous, au besoin en rajoutant des lignes, et compléter à partir de la ligne numéro 36 jusqu’à ce que l’algorithme s’arrête.

ligne	t	Valeur arrondi (t) 10^{-2}.	Condition (70/3)*e^(-t) - (10/3)*e^(-4t)>s
ligne numéro 0	0	20	VRAIE
ligne numéro 1	0,1	18,88	VRAIE
ligne numéro 2	0,2	17,61	VRAIE

0,64 VRAIE
0,58 VRAIE
0,52 VRAIE
0,47 FAUSSE

✓ RÉPONSE À RETENIR

Les lignes 36 à 39 donnent respectivement 0,64, 0,58, 0,52 et 0,47 ; l’algorithme s’arrête à 3,9 s.

Question 3.b. Donner la valeur de la variable t à la fin de l'exécution de l'algorithme et interpréter le résultat dans le contexte de la fermeture du tiroir.

1. À $t = 3{,}8$, $f(t) \approx 0{,}52 > 0{,}5$: la boucle continue.
2. À $t = 3{,}9$, $f(t) \approx 0{,}47 < 0{,}5$: la condition devient fausse et l’algorithme s’arrête.

Le pas de 0,1 seconde fournit une approximation du temps de franchissement du seuil.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La variable finale vaut $t = 3{,}9$ s ; le tiroir est alors fermé en moins de 4 secondes.

Question 4. La position moyenne du tiroir est définie par m = 1/4 ∫₀⁴ f(t)dt. Démontrer que m = 45/8 - (35/6)e⁻⁴ + (5/24)e⁻¹⁶.

Une primitive de f est $F(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{5}{6}e^{-4t}$. Ainsi,

$$m = \frac{1}{4}\left[-\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{5}{6}e^{-4t}\right]_0^4.$$

En évaluant aux bornes, on obtient $m = \frac{35}{6}(1 - e^{-4}) - \frac{5}{24}(1 - e^{-16})$. Les termes constants se regroupent en $\frac{45}{8}$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$m = \dfrac{45}{8} - \dfrac{35}{6}e^{-4} + \dfrac{5}{24}e^{-16}$ cm.

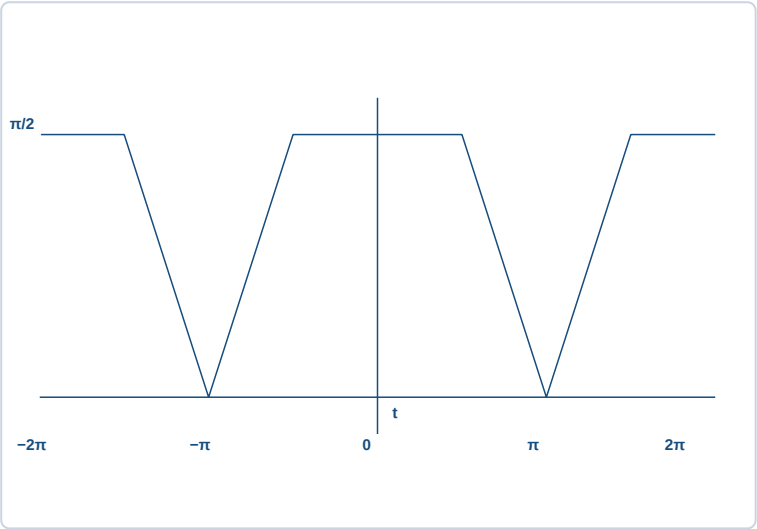
2. Séries de Fourier d'une fonction paire périodique

L'exercice étudie une fonction paire de période 2π définie par morceaux sur [0 ; π]. Il demande de tracer la fonction, de déterminer ses coefficients de Fourier et une somme partielle, puis d'utiliser ces coefficients pour approcher le carré de sa valeur efficace.

Question 1. Sur le document-réponse, tracer la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle [-2π ; 2π].

La fonction est paire et de période 2π. Elle atteint $\pi/2$ autour des multiples de 2π, sur des intervalles de largeur π, et vaut 0 aux multiples impairs de π. Relier ces points par des segments sur l'intervalle demandé.

Tracé de f sur [−2π ; 2π]



✓ RÉPONSE À RETENIR

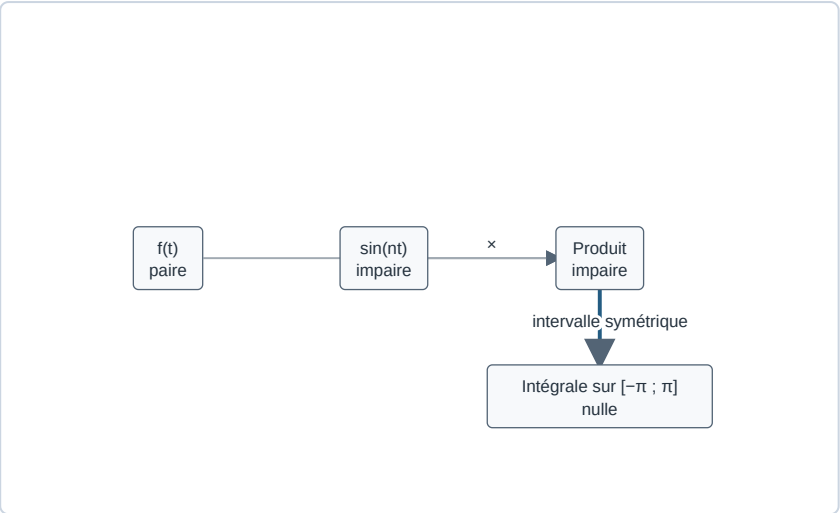
Tracé périodique de période 2π, avec des plateaux à $\pi/2$ centrés sur les multiples de 2π et des zéros aux multiples impairs de π.

Question 2. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, le coefficient de Fourier b_n est nul.

La fonction f est paire et $\sin(nt)$ est impaire. Leur produit est impair. Son intégrale sur l'intervalle symétrique $[-\pi;\pi]$ est donc nulle :

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt = 0$, pour tout entier $n \geq 1$.

Parité utilisée pour b_n



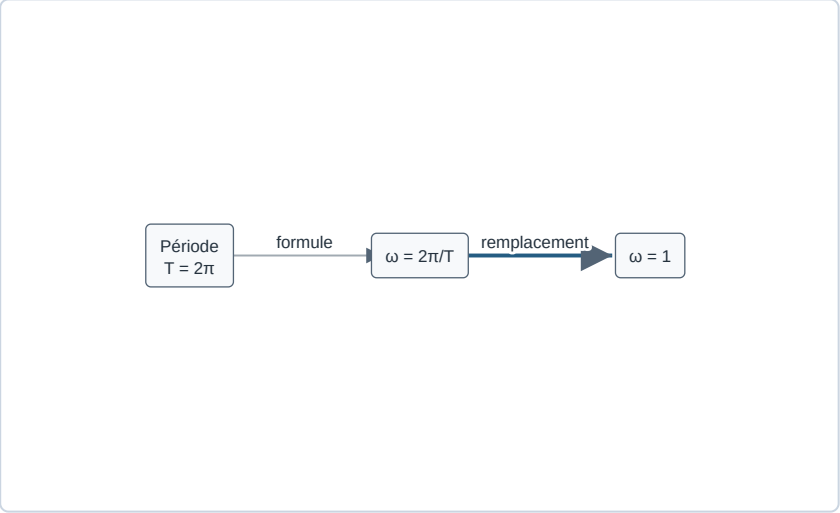
✓ RÉPONSE À RETENIR

Pour tout entier $n \geq 1$, $b_n = 0$.

Question 3. Déterminer la pulsation ω associée à la fonction f.

La période est $T = 2\pi$. D'après le formulaire, la pulsation associée vaut $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Ainsi, $\omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$.

Calcul de la pulsation



✓ RÉPONSE À RETENIR

$\omega = 1$ radian.

Question 4. Démontrer que le coefficient constant de Fourier vérifie $a_0 = 3\pi/8$.

Comme f est paire et $T = 2\pi$, le formulaire donne $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,dt$. Sur $[0;\pi/2]$, $f(t) = \pi/2$, puis $f(t) = \pi - t$ sur $[\pi/2;\pi]$.

Donc $a_0 = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{8}\right) = \frac{3\pi}{8}$.

Calcul de l'intégrale définissant a_0

Intervalle	f(t)	Intégrale de f
[0 ; π/2]	π/2	π²/4
[π/2 ; π]	π−t	π²/8
Total		3π²/8

La somme des deux intégrales est divisée par π.

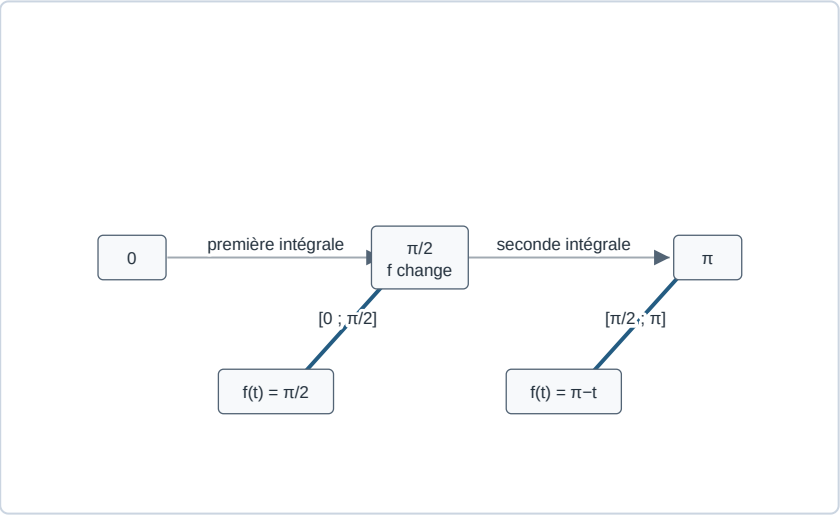
✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_0 = \frac{3\pi}{8}$.

Question 5. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, a_n = ∫₀^(π/2) cos(nt)dt + (2/π)∫_(π/2)^π (π - t)cos(nt)dt.

Pour une fonction paire, le formulaire donne $a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\,dt$. Ici, $T = 2\pi$ et $\omega = 1$, donc $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt$. En séparant à $t = \pi/2$, puis en remplaçant f par ses expressions sur chaque intervalle, on obtient la formule demandée.

Intervalles du calcul de a_n



✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_n = \int_0^{\pi/2} \cos(nt)\,dt + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - t)\cos(nt)\,dt$.

Question 6. **En admettant que $a_n = 2/(\pi n^2)\,(\cos(n\pi/2) - \cos(n\pi))$, déterminer les valeurs exactes de a_1, a_2 et a_3.**

On substitue $n = 1, 2, 3$ dans la formule fournie. Les valeurs des cosinus donnent respectivement $a_1 = \frac{2}{\pi}(0 - (-1))$, $a_2 = \frac{2}{4\pi}(-1 - 1)$ et $a_3 = \frac{2}{9\pi}(0 - (-1))$.

Valeurs des coefficients de Fourier

n	cos(nπ/2)	cos(nπ)	a_n
1	0	−1	2/π
2	−1	1	−1/π
3	0	−1	2/(9π)

Substitution dans la formule donnée.

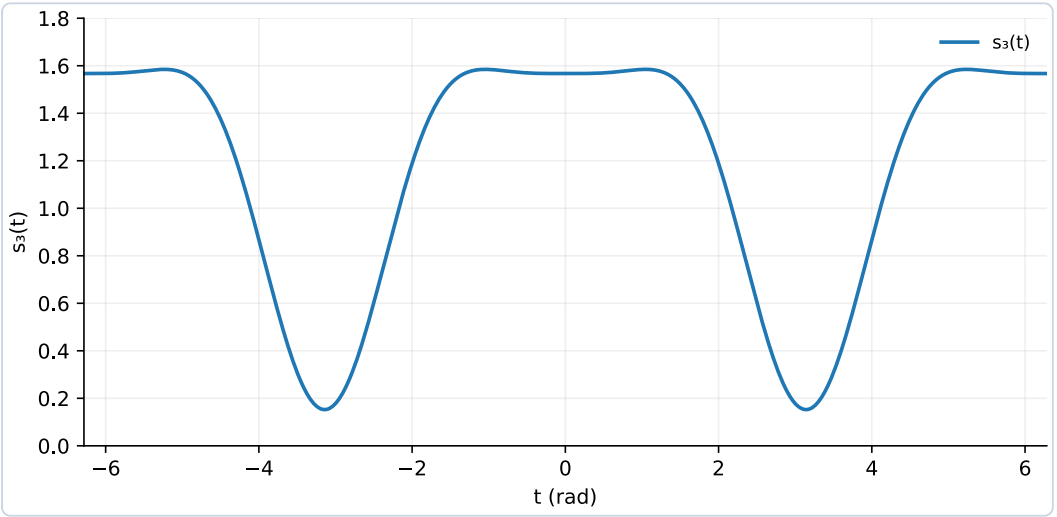
✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_1 = \frac{2}{\pi}, \quad a_2 = -\frac{1}{\pi}, \quad a_3 = \frac{2}{9\pi}.$

Question 7. **Déduire l'expression de $s_3(t) = 3\pi/8 + (2/\pi)\cos(t) - (1/\pi)\cos(2t) + (2/(9\pi))\cos(3t)$.**

La somme partielle d'ordre 3 est $s_3(t) = a_0 + a_1\cos(t) + a_2\cos(2t) + a_3\cos(3t)$, puisque les coefficients b_n sont nuls. En remplaçant par les coefficients déterminés précédemment, on obtient l'expression ci-dessous.

Somme partielle de Fourier s_3



Courbe calculée sur l'intervalle [−2π ; 2π].

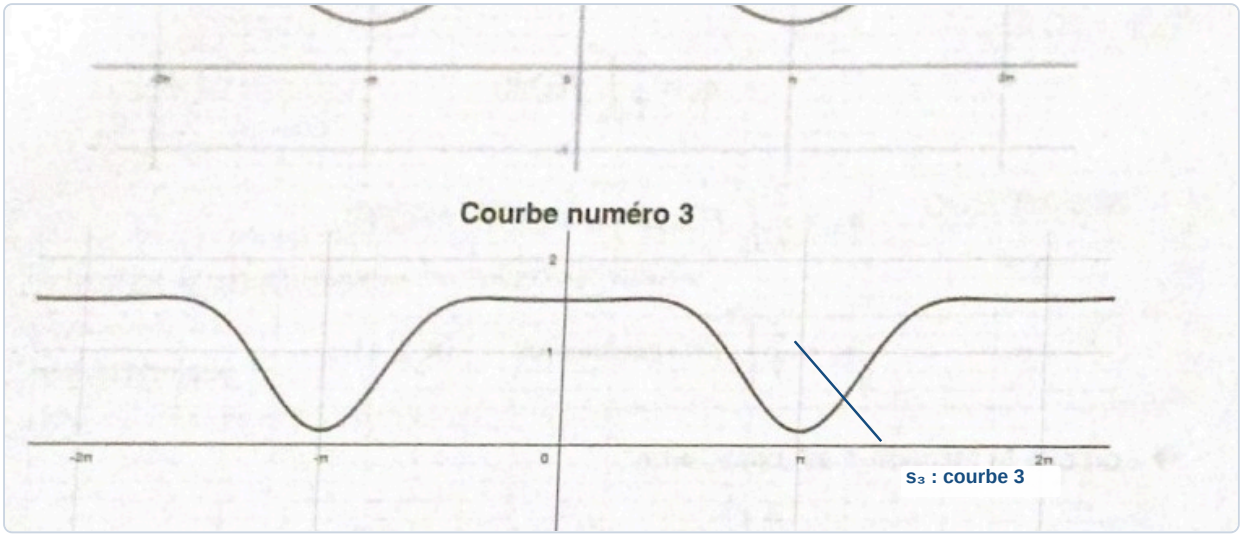
✓ RÉPONSE À RETENIR

$s_3(t) = \frac{3\pi}{8} + \frac{2}{\pi}\cos(t) - \frac{1}{\pi}\cos(2t) + \frac{2}{9\pi}\cos(3t).$

Question 8. **Indiquer, sans justification, laquelle des trois courbes proposées est associée à la fonction s_3.**

La courbe qui présente des maxima autour des multiples de 2π et des minima autour des multiples impairs de π, avec un sommet aplati, est la courbe numéro 3.

Courbe correspondant à s_3

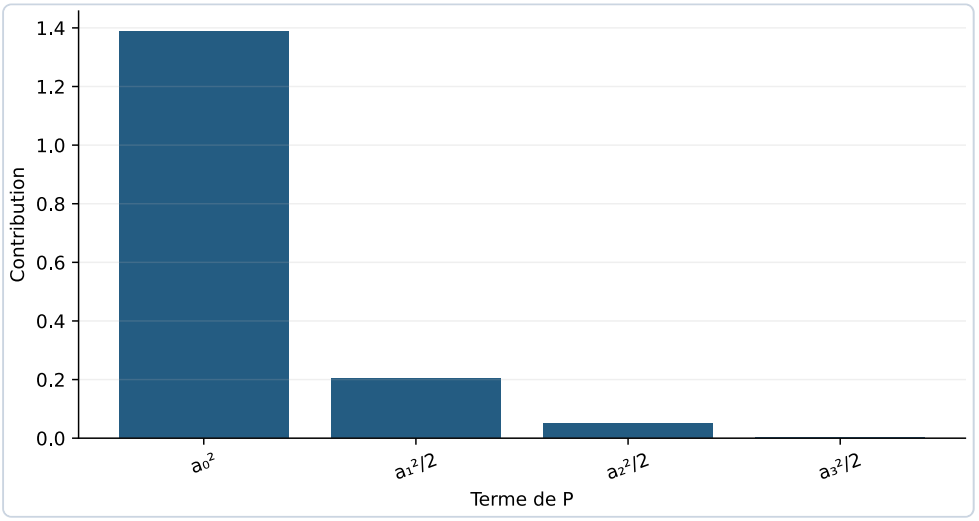


✓ RÉPONSE À RETENIR

Courbe numéro 3.

Question 9.a. **Pour P = $(a_0)^2$ + 1/2[$(a_1)^2$ + $(a_2)^2$ + $(a_3)^2$], donner une valeur approchée de P à 10^{-4} près.**

Avec les coefficients exacts, $P = (3\pi/8)^2 + \frac{1}{2}\left[(2/\pi)^2 + (-1/\pi)^2 + (2/(9\pi))^2\right] = \frac{9\pi^2}{64} + \frac{409}{162\pi^2}$. L'arrondi au dix-millième donne la valeur demandée.



Les quatre contributions donnent P.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P \approx 1{,}6437.$

Question 9.b. **Sachant que $F^2 = \pi^2/6$ et que P constitue une approximation de F^2, choisir le pourcentage d'erreur parmi 0,1 %, 1 % et 10 %. Une seule réponse est attendue, sans justification.**

L'erreur relative vaut environ $0{,}0739\,\%$. Parmi les choix proposés, cela correspond à $0{,}1\,\%$.

Choix du pourcentage d'erreur

✓ 0,1 %

1 %

10 %

✓ RÉPONSE À RETENIR

$0{,}1\,\%$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : L'épreuve de mathématiques du BTS, session 2023, porte le code 23MATGRB2 et dure 2 heures, avec un coefficient de 1,5 ou 2 selon la spécialité. Deux exercices de 10 points portent sur la fermeture d'un tiroir, modélisée par une équation différentielle et une étude de fonction, puis sur les séries de Fourier d'une fonction paire périodique et l'approximation de sa valeur efficace.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour $y'' + 5y' + 4y = 0$, les racines de l'équation caractéristique déterminent la forme générale de la solution.
- La distance du tiroir est $f(t) = (70/3)e^{-t} - (10/3)e^{-4t}$, avec f en centimètres et t en secondes.
- Pour une fonction paire, les coefficients sinus b_n sont nuls et les coefficients cosinus se calculent sur une demi-période.
- La pulsation vérifie $\omega = 2\pi/T$; une somme partielle de Fourier conserve les coefficients jusqu'au rang considéré.

Points de vigilance & attentes du jury

- Distinguer la distance initiale f(0) de la vitesse initiale f'(0), et conserver les unités.
- Dans l'algorithme, évaluer la condition à chaque valeur de t et s'arrêter à sa première évaluation fausse.
- Utiliser correctement la parité et la période pour tracer la fonction et simplifier les intégrales de Fourier.
- Pour le pourcentage d'erreur, rapporter l'écart entre P et F^2 à la valeur de référence F^2.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre l'équation différentielle de l'exercice sur le tiroir ?

On résout l'équation caractéristique $r^2 + 5r + 4 = 0$. Ses racines réelles distinctes donnent une solution générale composée de deux exponentielles. Les conditions initiales déterminent ensuite les constantes de cette solution.

Q : Pourquoi les coefficients b_n sont-ils nuls dans l'exercice sur les séries de Fourier ?

La fonction est paire et $\sin(n\omega t)$ est impaire. Leur produit est impair, donc son intégrale sur un intervalle symétrique est nulle. Cela entraîne $b_n = 0$ pour tout entier n supérieur ou égal à 1.

Q : Comment organiser les deux heures de l'épreuve ?

Les deux exercices valent chacun 10 points et peuvent être traités indépendamment. Répartissez le temps selon les tâches et votre aisance, prévoyez une marge pour vérifier les résultats et pensez à rendre le document-réponse demandé.

Q : Quels éléments fournir pour les questions de justification ?

Présentez la méthode et les étapes utiles, pas seulement le résultat. Respectez les notations du sujet, justifiez les limites et variations, donnez les unités dans le contexte du tiroir et arrondissez selon la précision demandée.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btscira.fr/assets/annales/bts-cira/E2 - Mathématiques/2023/BTS CIRA - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf

Ressources BTS Contrôle Industriel et Régulation Automatique : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.